

1. Considere el sistema lineal:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

(a) Escriba el sistema en la forma $A\vec{x} = \vec{b}$.

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ luego el sistema se escribe en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Diga si el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución. En caso afirmativo escriba todas las soluciones.

Para resolver el sistema, partimos de la matriz aumentada

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

y aplicamos el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

así que no existen soluciones para el sistema.

(c) Diga si el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones dado, la existencia de soluciones a tal sistema es equivalente a la existencia de las combinaciones lineales de los tres vectores columna de la matriz A y, por lo tanto, no existen tales combinaciones lineales.

2. Considere la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Diga para que valores de t el determinante de B es cero.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = t,$$

así que $\det B = 0$ si y solo si $t = 0$.

3. Justificando su respuesta con un contraejemplo o una demostración, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (a) Sean A, B y C matrices de tamaño 2×2 tales que $C \neq 0$ y $CA = CB$. Entonces $A = B$.

FALSO. Es claro que, de ser C invertible, multiplicando a izquierda por C^{-1} a ambos lados de la ecuación $CA = CB$ obtenemos $A = C^{-1}CA = C^{-1}CB = B$. Sin embargo, si $C \neq 0$ no es invertible el argumento no es válido: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos $CA = CB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, pero $A \neq B$.

- (b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = AB$ entonces la entrada

$c_{32} = 4$.

FALSO. $c_{32} = (\text{Fila 3 de } A) \times (\text{Columna 2 de } B) = -1 + 0 + 0 = -1$.

a las matrices aumentadas siguientes indique cómo se clasifica el sistema correspondiente:

- Consistente con soluciones infinitas.
- Inconsistente.
- Consistente con solución única

- (a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$ corresponde a un sistema consistente con infinitas soluciones, porque en el sistema hay más incógnitas que ecuaciones.

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ corresponde a un sistema consistente con solución única, hay tres

incógnitas y tres ecuaciones independientes, pues la reducción da lugar claramente a tres pivotes en la matriz reducida.

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ corresponde claramente ($0 = 1$) a un sistema inconsistente.

(d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ corresponde a un sistema consistente con infinitas soluciones, porque en el sistema hay más incógnitas que ecuaciones.

4. (a) Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para encontrar la inversa de A tomamos la matriz aumentada

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y la reducimos usando el método de Gauss-Jordan hasta encontrar a la izquierda la matriz identidad:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow (-1) \times F_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow (-1) \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right), \end{aligned}$$

luego la matriz es efectivamente invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Encuentre la solución del sistema lineal:
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Dado que la matriz de coeficientes del sistema es la matriz A que hemos invertido, usando la inversa de A tal solución se encuentra como

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$