Álgebra lineal - MATE 1105 **Nombre:** ______________________
2014-20
Parcial 3- Tema A **Código:** ______________________
1 de noviembe de 2014
Tiempo limite: Una hora y 20 minutos Profesor ______________________

---

1. (6 points) Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.
   (a) (2 points) Halle una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de S.
   (b) (2 points) Halle la proyección del vector $(1, 2, 1)$ sobre el plano S.
   (c) (2 points) Exprese el vector $(1, 2, 1)$ como una suma $v_S + u$ donde $v_S \in S$ y $u \in S^{\perp}$.

2. (6 points) Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ z - y \\ x - z \end{pmatrix}$$

   (a) (2 points) Halle la matriz de la transformación en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) (2 points) Halle el núcleo de L.
   (c) (1 point) Halle el rango de L. (Dimensión de la imagen de L.)
   (d) (1 point) Sea $S = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Encuentre la imagen por L de S.

3. (4 points) Teniendo en cuenta los tres datos

x	1	2	3
y	2	4	3

   Encuentra por mínimos cuadrados la función lineal que mejor se ajuste a los datos.

4. (4 points) Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.
   (a) (2 points) Si A es una matriz ortogonal 2×2, entonces $\det A = 1$.
   (b) (2 points) Las funciones $f_1(x) = x - \frac{3}{4}$ y $f_2(x) = x^2$ son ortogonales en el espacio vectorial $C[0, 1]$ con producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Solución

1. Una base para S es $\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$. Ortonormalizando obtenemos $\{(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})\}$.

   Una base para $S^\perp$ es $(1,1,-1)$. La proyección del vector $(1,2,1)$ sobre el plano S es $(1,0,1)+(-2/3,4/3,2/3)=(1/3,4/3,5/3)$. Finalmente $(1,2,1)=(1/3,4/3,5/3)+(2/3,2/3,-2/3)$.

2. Matriz de $[L]=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. El núcleo es Span$(1,1,1)$, luego el rango es igual a 2. La imagen de S está dada por Span$(-1,1,0)$

3. La función lineal está dada por la ecuación $y=c_0+c_1x$, donde las constantes c_0,c_1 se obtienen como la solución del problema de mínimos cuadrados

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 3\end{bmatrix}.$$

   El problema $A^TAc=A^Tb$ está dado por

$$\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 19\end{bmatrix}$$

   con solución $\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1/2\end{bmatrix}$. Luego la función lineal es

$$y=2+1/2x.$$

4. (a) Falso. Si A es una matriz ortogonal, $A^TA=I$ implica que $\det A=\pm1$ independientemente de su tamaño. Por ejemplo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ es ortogonal y su determinante es -1.

   (b) Verdadero. Calculando la integral obtenemos

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_0^1(x^3-\frac{3}{4}x^2)dx=(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}\frac{x^3}{3})\mid_0^1=0,$$

   luego las funciones dadas son ortogonales.