Parcial I – Álgebra Lineal

Agosto 24 de 2011

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

(i) El plano $x - y + z = 1$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ son ortogonales solamente si $a = 1$.

(iii) Si A y B son dos matrices cuadradas, entonces $(A^T BA)^T = A^T BA$.

(9 Puntos) **II**. Considere el sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + \ x_2 - 2x_3 \ = \ 0 \end{array} \right.$$

(i) Escriba el sistema en la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Resuelva el sistema y diga si tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Si tiene solución única encuentre tal solución, si tiene infinitas soluciones encuentre todas las soluciones al sistema.[1] Haga una gráfica del conjunto se soluciones.

(iii) Pertenece el vector $\vec{b} = (3, 0)$ al espacio generado por los vectores columna de la matriz A? Explique su respuesta.

(6 Puntos) **III**. Considere el sistema no homogeneo de ecuaciones lineales $\bar{A}\vec{x} = \vec{b}$, donde $\bar{A} \in M_2(\mathbb{R})$ es la matriz obtenida a partir de la matriz A del punto anterior al eliminar la última columna, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Explique por qué el sistema tiene solución única.

(ii) Diga si la matriz $\bar{A}$ es invertible. Explique.

(iii) Encuentre la inversa de la matriz $\bar{A}$ y úsela para encontrar la solución al sistema.

Solución

I. (i) Falso. El plano $x - y + z = 1$ no contiene el origen $\vec{0}$, luego *no* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

[1] Recuerde que, si hay infinitas soluciones, la solución general se escribe como la suma de la solución general del sistema homogeneo asociado y una solución particular del sistema no homogeneo.

(ii) Falso. Los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ son ortogonales si y solo si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ y, en este caso,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 - 3 - a^2 + 2 = 1 - a^2,$$

luego hay dos posibles soluciones: $a = \pm 1$.

(iii) Falso. Si A y B son dos matrices cuadradas, entonces $(A^T BA)^T = A^T B^T (A^T)^T = A^T B^T A$, así que $(A^T BA)^T = A^T BA$ solamente si $B = B^T$. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$(A^T BA)^T = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

pero

$$A^T BA = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

II. (i) El sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

se escribe como el producto matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Para resolver el sitema hacemos la reducción de Gauss-Jordan correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \mapsto \frac{1}{3} F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right),$$

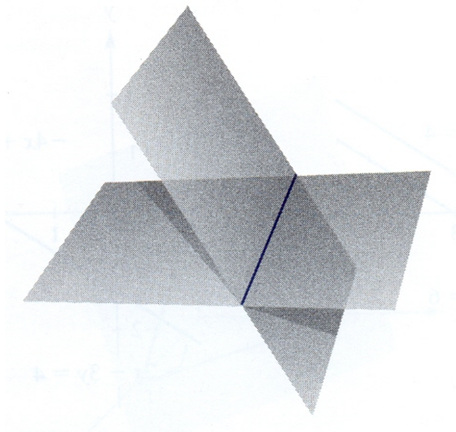
obteniendo dos pivotes en la matriz reducida. Como el número de pivotes es menor que el número de incógnitas en el sistema, es claro que obtendremos un número infinito de soluciones para el mismo. En efecto, las ecuaciones lineales correspondientes a la matriz reducida son

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

luego, despejando en términos de x_3, tenemos que $x_1 = 1$ y $x_2 = 2x_3 - 1$ y, por lo tanto, las infinitas soluciones al sistema no homogeneo están dadas por

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_3 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es la solución general al sistema homogeneo asociado y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución particular al sistema no homogeneo. Dado que cada ecuación lineal corresponde a un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$, y son independientes, el conjunto de soluciones es el conjunto de puntos en el espacio que se encuentran simultaneamente en ambos planos.



Así, tal conjunto de soluciones es una recta, como se ilustra en la figura anterior.

(iii) Es fácil ver que el vector $\vec{b} = (3, 0)$ pertenece al espacio generado por los vectores columna de la matriz A, ya que existen infinitas soluciones al sistema, es decir que existen infinitas combinaciones lineales no triviales

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que generan a $\vec{b}$. Por ejemplo, si tomamos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 0$ onbenemos $\vec{b}$.

III. (i) El sistema no homogeneo de ecuaciones lineales $\bar{A}\vec{x} = \vec{b}$, es obtenido apartir del sistema anterior al eliminar la última columna de la matriz A, podemos entonces deducir que cualquier reducción de la matriz $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ da lugar a dos pivotes y, en consecuencia, el sistema tiene solución única.

(ii) La matriz $\bar{A}$ es invertible ya que, como vimos en la parte (i), para todo $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ el sistema anterior tiene solución única.

(iii) Para calcular la inversa de la matriz $\bar{A}$, haciendo operaciones elementales entre filas tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto \frac{1}{3} F_2}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \mapsto F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

luego la inversa de la matriz es

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Una vez calculada la inversa, para encontrar la solución al sistema $\bar{A}\vec{x} = \vec{b}$, multiplicando a izquierda a ambos lados por la inversa de $\bar{A}$ tenemos que:

$$\bar{A}^{-1}\bar{A}\vec{x} = \vec{x} = \bar{A}^{-1}\vec{b}$$

es decir que

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

como puede verificarse facilmente a partir de las ecuaciones iniciales.