Parcial 2 - Álgebra Lineal

Septiembre 21 de 2011

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

(i) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ que es sobre.

(ii) El conjunto $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

(iii) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces $T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(7,5 Puntos) **II**. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_4 - 2x_3 \\ 2x_3 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Encuentre la matriz de la transformación.

(ii) Encuentre el núcleo (espacio nulo) y el rango (espacio imagen) de la transformación.

(iii) Encuentre una base para el núcleo, una base para el rango de la transformación y verifique la ecuación del rango.

(7,5 Puntos) **III**. Considere la transformación lineal $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2[x]$ dada por

$$T(A) = (3d - 2c) + (2c - b)x + (b - a)x^2,$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre la matriz de la transformación respecto a las bases canónicas correspondientes.

(ii) Encuentre el núcleo (espacio nulo) y el rango (espacio imagen) de la transformación.

(iii) Encuentre una base para el núcleo, una base para el rango de la transformación y verifique la ecuación del rango.

Solución

I.

(i) Falso. No existe ninguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ que sea sobre, porque T sobre quiere decir que $\dim R_T = 4$ pero, por la ecuación del rango, $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim N_T + \dim R_T$, lo cual es imposible.

(ii) Falso. El conjunto $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$ *no* es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ ya que, por ejemplo, si $A \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es diferente de ± 1, entonces

$$(\alpha A)^T(\alpha A) = \alpha^2 A^T A = \alpha^2 I \neq I,$$

así que $\alpha A \notin W$. Es también obvio que $0 \notin W$.

(iii) Verdadero. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, entonces $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x})+T(\vec{y})$, así que si $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

II.

(i) La matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_4 - 2x_3 \\ 2x_3 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

se encuentra evaluando la transformación en la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) El espacio nulo de T es el conjunto de vectores del espacio de salida ($\mathbb{R}^4$) que son 'anulados' por la transformación, es decir:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

osea que

$$\begin{aligned} 3x_4 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_3 - x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

o, equivalentemente, $x_2 = x_1,\ x_3 = \frac{x_1}{2}$ y $x_4 = \frac{x_1}{3}$. Así que,

$$N_T = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalmente, como $\dim N_T = 1$, el rango (espacio imagen) de la transformación debe tener dimensión $4 - 1 = 3$, es decir que la transformación es sobre $R_T = \mathbb{R}^3$.

(iii) Una base para el núcleo está dada, según el cálculo anterior, por

$$B_{N_T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

y, como la transformación es sobre, una base para el rango de T es cualquier base para $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, tomando los primeros tres vectores de la matriz de la transformación, tenemos

$$B_{R_T} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La ecuación del rango se cumple obviamente.

III.

(i) La transformación lineal $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2[x]$ dada por

$$T(A) = (3d - 2c) + (2c - b)x + (b - a)x^2,$$

actua sobre la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$,

$$B_{M_2(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

como sigue:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -x^2,\ \ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -x + x^2,$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 + 2x,\ \ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

así que la matriz de la transformación respecto a la base canónica $B_{P_s[x]} = \{1, x, x^2\}$ es

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la misma del punto anterior.

(ii) El núcleo (espacio nulo) de T es el conjunto de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que, transformadas en polinomios según T, se anulan. Las ecuaciones que se obtienen son

$$\begin{aligned} 3d - 2c &= 0 \\ 2c - b &= 0 \\ b - a &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$N_T = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Igual que en el punto anteriort, como $\dim N_T = 1$, el rango (espacio imagen) de la transformación es $P_2[x]$.

(iii) Según lo obtenido anteriormente

$$B_{N_T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B_{R_T} = \left\{ 1, x, x^2 \right\},$$

lo que verifica una vez mas la ecuación del rango.