Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Mayo 22 de 2012

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. Si A y B son matrices ortogonales del mismo tamaño, entonces la matriz AB es una matriz ortogonal.

b. Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

c. Si en un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ hay igual número de ecuaciones y de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única.

d. Si A y B son matrices 2×2, entonces $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(4 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Encuentre los valores propios y vectores propios de A.

b. Identifique la cónica $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ y trace la gráfica correspondiente.

(4 Puntos) **III**. Encuentre una matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuyos valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, y cuyos vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, respectivamente.

(12 Puntos) **IV**. Considere el subespacio vectorial $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0 \right\}$ y considere los conjuntos $B_W = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Demuestre que B_W es una base para W y B es una base **ortogonal** para $\mathbb{R}^3$.

b. Encuentre $W^{\perp}$.

c. Encuentre la proyección ortogonal del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre W.

d. Encuentre las coordenadas del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ con respecto a la base B.

e. Encuentre la matriz C_{B,B_c} de cambio de base, que permite calcular las coordenadas de un vector con respecto a la base canónica B_c a partir de las coordenadas del vector con respecto a la base B.

f. Encuentre las coordenadas en la base canónica del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

g. Si $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal que a cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ lo proyecta ortogonalmente sobre el subespacio W, encuentre la matriz de tal transformación **con respecto a la base** B.

h. Encuentre la proyección ortogonal sobre W del vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$.

TIEMPO MÁXIMO 2 HORAS. NO SE PERMITE EL USO DE TABLAS, LIBROS, APUNTES, CALCULADORAS NI APARATOS ELECTRNICOS. TODO TELÉFONO CELULAR DEBE ESTAR APAGADO.

Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Mayo 22 de 2012

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. Si P_1 y P_2 son matrices de proyección del mismo tamaño, entonces la matriz P_1P_2 es una matriz de proyección.

b. Existe una transformación lineal uno a uno (inyectiva) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

c. Si en un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ hay igual número de ecuaciones y de incógnitas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

d. Si A y B son matrices similares, entonces $\det A = \det B$.

(4 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

a. Encuentre los valores propios y vectores propios de A.

b. Identifique la cónica $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 21$ y trace la gráfica correspondiente.

(4 Puntos) **III**. Encuentre una matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuyos valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, y cuyos vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, respectivamente.

(12 Puntos) **IV**. Considere el subespacio vectorial $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \right\}$ y considere los conjuntos $B_W = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Demuestre que B_W es una base para W y B es una base **ortogonal** para $\mathbb{R}^3$.

b. Encuentre $W^\perp$.

c. Encuentre la proyección ortogonal del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre W.

d. Encuentre las coordenadas del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ con respecto a la base B.

e. Encuentre la matriz C_{B,B_c} de cambio de base, que permite calcular las coordenadas de un vector con respecto a la base canónica B_c a partir de las coordenadas del vector con respecto a la base B.

f. Encuentre las coordenadas en la base canónica del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

g. Si $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal que a cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ lo proyecta ortogonalmente sobre el subespacio W, encuentre la matriz de tal transformación **con respecto a la base** B.

h. Encuentre la proyección ortogonal sobre W del vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

TIEMPO MÁXIMO 2 HORAS. NO SE PERMITE EL USO DE TABLAS, LIBROS, APUNTES, CALCULADORAS NI APARATOS ELECTRNICOS. TODO TELÉFONO CELULAR DEBE ESTAR APAGADO.

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL-1105 – Primer Semestre de 2012

Solución

I. 0.5 puntos cada enunciado correcto, **1.0 punto** cada correcta justificación.

a. Si A y B son matrices ortogonales/de proyección del mismo tamaño, entonces la matriz AB es una matriz ortogonal/de proyección. Verdadero/Falso.

b. Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / inyectiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Falso.

c. Si en un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ hay igual número de ecuaciones y de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única / infinitas soluciones. Falso.

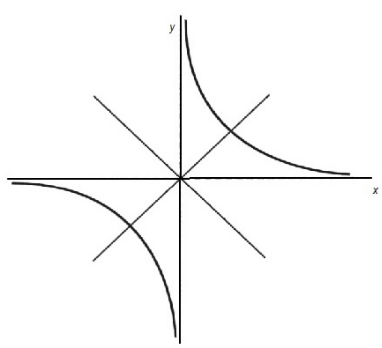
d. Si A y B son matrices 2×2, entonces $\det(A + B) = \det A + \det B$. Falso.
Si A y B son matrices similares, entonces $\det A = \det B$. Verdadero.

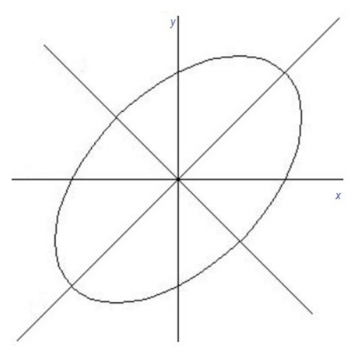
II. 0.5 puntos cada vector y valor propio correcto, **1.0 punto** por identificar correctamente la cónica y **1.0 punto** por trazar correctamente un boceto.

Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

a. Los valores propios de A son $\lambda_1 = 3$y $\lambda_2 = -1$ y los vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Los valores propios de B son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 7$ y los vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

b. La cónica $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ es una hipérbola rotada $-\pi/4$. La cónica $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 21$ es una elipse rotada $-\pi/4$.





III. 1.0 punto por identificar correctamente C, **1.0 punto** por identificar correctamente C^{-1}, **1.0 punto** por identificar correctamente D y **1.0 punto** por calcular correctamente la matriz. **Ojo: Hay otros métodos que deben ser evaluados independientemente!**

La inversa de la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ es la matriz $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.
La matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuyos valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, y cuyos vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, respectivamente, es: $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$.
La matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuyos valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, y cuyos vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, respectivamente, es: $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

IV. 1.5 puntos CADA ENUNCIADO CORRECTO.

Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \pm 2y \mp 3z = 0 \right\}$ y considere los conjuntos $B_W = \left\{ \begin{bmatrix} \mp 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} \mp 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 2 \\ \mp 3 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Es fácil ver que B_W es una base para W (los vectores pertenecen a W y son independientes) y, dada la escogencia de signos y la dimensión de $W^\perp$, B es una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$.

b. $W^\perp = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 2 \\ \mp 3 \end{bmatrix} \right\}$.

c. $\mathsf{Proy}_{\begin{bmatrix} 1 \\ \pm 2 \\ \mp 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm 1 \\ \mp\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, así que $\mathsf{Proy}_W \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm 2 \\ \pm\frac{3}{2} \end{bmatrix}$. (También se puede calcular proyectando sobre cada vector de la base *ortogonal* de W y sumando, o calculando la matriz de proyección correspondiente.)

d. Las coordenadas del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ \pm 2 \\ \mp 3 \end{bmatrix}$ con respecto a la base B son $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

e. La matriz C_{B,B_c} de cambio de base de la base B a la canónica B_c es

$$C_{B,B_c} = \begin{pmatrix} \mp 2 & \pm 3 & 1 \\ 1 & 6 & \pm 2 \\ 0 & 5 & \mp 3 \end{pmatrix}.$$

f. El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$ en el tema A y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ en el tema B, respectivamente.

g. La matriz de la transformación lineal que proyecta ortogonalmente sobre el subespacio W, con respecto a la base B, es:

$$P_W^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

h. Finalmente, como el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto a B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$ en el tema A y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ en el tema B, respectivamente, podemos usar la matriz P_W^B para calcular la proyección del vector $\vec{v}$ correspondiente:

$$[\mathsf{Proy}_W \vec{v}]_B = P_W^B [\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego $\mathsf{Proy}_W \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ en el tema A y $\mathsf{Proy}_W \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ en el tema B, respectivamente.

Otra forma sencilla de hacerlo es notar que $\mathsf{Proy}_{W^\perp} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathsf{Proy}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ en el tema A y $\mathsf{Proy}_{W^\perp} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \mathsf{Proy}_{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en el tema B, respectivamente, de donde la misma respuesta se sigue obviamente.