Universidad de Los Andes — Álgebra lineal 1

Parcial 1 - Tema A

16 de febrero 2013 — MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen.

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio I

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. ¿Para cuál valor de $t \in \mathbb{R}$ es la matriz $B = \begin{pmatrix} -16 & t & 4 \\ 9 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la inversa de A?

2. Resuelva el sistema $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio II

Considere el sistema $(S) \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 1 \\ -4x & -2y & +2z & = & -2 \end{array} \right.$.

1. Escriba el sistema (S) en forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Escriba la solución general del sistema (S) en la forma $\vec{p} + \vec{h}$ donde $\vec{p}$ es una solución particular de (S) y $\vec{h}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado.

3. Halle una base del espacio generado por las columnas de A.

4. ¿Está el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por las columnas de A? Justifique su respuesta.

5. Recuerde que se denotó por A la matriz del sistema (S). ¿Está el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en el núcleo (espacio nulo) de A? Justifique su respuesta.

6. Halle una base del núcleo de A.

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (no se otorgarán puntos por respuestas no justificadas).

1. Sean $\vec{u} = [1, 2]$ y $\vec{v} = [2, 4]$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $\vec{w}$ un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$. Entonces $\vec{w} = \vec{0}$.

2. Sea $n \geq 2$ un entero. Si A es una matriz cuadrada no nula de tamaño n, entonces, para cualquier vector $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una solución única.

3. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es simétrica.

Universidad de Los Andes — Álgebra lineal 1

Parcial 1 - Tema B

16 de febrero 2013 — MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen.

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio I

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} -16 & 9 & 4 \\ -9 & 5 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. ¿Para cuál valor de $t \in \mathbb{R}$ es la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & t & -1 \end{pmatrix}$ la inversa de A?

2. Resuelva el sistema $A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio II

Considere el sistema $(S) \left\{ \begin{array}{llll} 2x & +y & -z & = 1 \\ 6x & +3y & -3z & = 3 \end{array} \right.$.

1. Escriba el sistema (S) en forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Escriba la solución general del sistema (S) en la forma $\vec{p} + \vec{h}$ donde $\vec{p}$ es una solución particular de (S) y $\vec{h}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado.

3. Halle una base del espacio generado por las columnas de A.

4. ¿Está el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por las columnas de A? Justifique su respuesta.

5. Recuerde que se denotó por A la matriz del sistema (S). ¿Está el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en el núcleo (el espacio nulo) de A? Justifique su respuesta.

6. Halle una base del núcleo de A.

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (no se otorgarán puntos por respuestas no justificadas).

1. Sean $\vec{u} = [1, 1]$ y $\vec{v} = [1, -1]$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $\vec{w}$ un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$. Entonces $\vec{w} = \vec{0}$.

2. Sea $n \geq 2$ un entero. Si A es una matriz cuadrada no nula de tamaño n, entonces, para cualquier vector $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una solución única.

3. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es simétrica.

Solución del primer parcial

Ejercicio I

1. Tema A: Al poner $t = 9$ en B, se verifica que $BA = I_3$.
Tema B: $t = -3$.

2. Tema A: La solución del sistema es $\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Tema B: $A^{-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$.

Ejercicio II

1. Tema A: $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\-4 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Tema B: $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\6 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

2. Temas A y B: La forma escalón reducida de la matriz aumentada del sistema (S) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Una solución particular del sistema (S) es $\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$. La solución general del sistema homogéneo asociado a (S) es

$$\lambda\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

con λ y μ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la solución general del sistema (S) es

$$\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

con λ y μ en $\mathbb{R}$.

3. La forma escalón reducida de A tiene un solo pivote, en la primera columna, luego la primera columna de A es una base del espacio generado por las columnas de A.

Tema A: $\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ es una base del espacio generado por las columnas de A.

Tema B: $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ es una base del espacio generado por las columnas de A.

4. Tema A: El vector $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por las columnas de A, pues

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}.$$

Tema B:
$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}.$$

5. Tema A: Se tiene $A\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \vec{0}$, por lo que $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ está en el núcleo de A.

Tema B: Se tiene $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\\cdots\end{pmatrix} \neq \vec{0}$, por lo que $\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ no está en el núcleo de A.

6. Temas A y B: Por la resolución del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ hecha en la pregunta **2**, se tiene que
$$\left(\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
es una base del núcleo de A.

Ejercicio III

1. Tema A: Falso. Por ejemplo $\vec{w} = [-2, 1]$ es ortogonal a $\vec{u} = [1, 2]$ y $\vec{v} = [2, 4]$ y no es nulo.

Tema B: Verdadero. Si $\vec{w} = [x, y]$ es ortogonal a $\vec{u} = [1, 1]$ y $\vec{v} = [1, -1]$, entonces $x + y = 0$ y $x - y = 0$, por lo que $x = y = 0$.

2. Temas A y B: Falso. Por ejemplo, el sistema $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ tiene una cantidad infinita de soluciones y el sistema $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ no tiene soluciones.

3. Temas A y B: Falso. La matriz $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es igual a $\begin{pmatrix}0 & -1/2\\1/2 & 0\end{pmatrix}$, la cual no es simétrica.