Universidad de Los Andes — Álgebra lineal 1

Parcial 2 - Tema A

9 de marzo 2013 — MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**.

Ejercicio I

Sea $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales. Se recuerda que se dice que una matriz cuadrada A es simétrica si $A^t = A$ y se denota

$$\mathcal{S}(2;\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$$

el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2.

1. `2 puntos.` Muestre que $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$.

2. `2 puntos.` Muestre que $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$.

3. `2 puntos.` Determine la dimensión de $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$.

Ejercicio II

Sea R la recta de ecuación $y = -x$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta R: $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. `4 puntos.` Halle $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. `2 puntos.` Determine la matriz A de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (matriz estándar de T) y la expresión general de $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

3. `2 puntos.` Se recuerda que, para cualquier $n \geq 1$, se denota $T^n = T \circ \ldots \circ T$ la aplicación T compuesta n veces con sí misma. Calcule $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T^3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. `2 puntos.` ¿Cuál es la matriz estándar de T^2? ¿Y de T^{101}?

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (no se otorgarán puntos por respuestas no justificadas).

1. `2 puntos.` Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ x-y \end{pmatrix}$. Entonces la imagen de T en $\mathbb{R}^3$ es una recta (es decir, un sub-espacio vectorial de dimensión 1 de $\mathbb{R}^3$).

2. `2 puntos.` El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a 2.

3. `2 puntos.` Sea $P_2 = \mathbb{R}_2[X]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces $(1+X)$ y $(1+X^2)$ son linealmente independientes en P_2.

Parcial 2 - Tema B

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**.

Ejercicio I

Sea $\mathcal{M}(3;\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices 3×3 con coeficientes reales. Se recuerda que se dice que una matriz cuadrada A es anti-simétrica si $A^t = -A$ y se denota

$$\mathcal{A}(3;\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(3;\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$$

el conjunto de todas las matrices anti-simétricas de tamaño 3×3.

1. `2 puntos.` Muestre que $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(3;\mathbb{R})$.

2. `2 puntos.` Muestre que $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$.

3. `2 puntos.` Determine la dimensión de $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$.

Ejercicio II

Sea R la recta de ecuación $y = x$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta R: $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. `4 puntos.` Halle $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. `2 puntos.` Determine la matriz A de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (matriz estándar de T) y la expresión general de $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

3. `2 puntos.` Se recuerda que, para cualquier $n \geq 1$, se denota $T^n = T\circ\ldots\circ T$ la aplicación T compuesta n veces con sí misma. Calcule $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T^3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. `2 puntos.` ¿Cuál es la matriz estándar de T^2? ¿Y de T^{100}?

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. `2 puntos.` Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}$. Entonces la imagen de T en $\mathbb{R}^3$ es un plano (es decir, un sub-espacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$).

2. `2 puntos.` El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a 1.

3. `2 puntos.` Sea $P_2 = \mathbb{R}_2[X]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces $(1+X)$ y $(X+X^2)$ son linealmente independientes en P_2.

Solución del segundo parcial

Ejercicio I

1. Tema A: La matriz nula es simétrica. Si $A^t = A$ y $B^t = B$ entonces $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$. Si $A^t = A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$. Por lo tanto, $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$.

Tema B: La matriz nula es anti-simétrica. Si $A^t = -A$ y $B^t = -B$ entonces $(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B)$. Si $A^t = -A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -\lambda A$. Por lo tanto, $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(3;\mathbb{R})$.

2. Tema A: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R})$. Entonces $A^t = A$ si y sólo si $b = c$. En este caso,

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que la familia propuesta es generadora en $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$. Si

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

entonces $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = 0$ en $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$, luego $\lambda = \mu = \nu = 0$ en $\mathbb{R}$, por lo que la familia propuesta es una familia libre. Como es libre y generadora, esa familia es una base de $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$.

Tema B: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3;\mathbb{R})$. Entonces $A^t = -A$ si y sólo si $a = e = i = 0$, $d = -b$, $g = -c$ y $h = -f$. En este caso,

$$A = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la familia propuesta es generadora en $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$. Si

$$\lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

entonces $\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} = 0$ en $\mathcal{M}(3;\mathbb{R})$, luego $\lambda = \mu = \nu = 0$ en $\mathbb{R}$, por lo que la familia propuesta es una familia libre. Como es libre y generadora, esa familia es una base de $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$.

3. La dimensión de un espacio vectorial es el cardinal de cualquier base de ese espacio vectorial.

Tema A: En la pregunta **2** se halló una base de $\mathcal{S}(2;\mathbb{R})$ que contiene tres vectores. Por lo tanto, $\dim \mathcal{S}(2;\mathbb{R}) = 3$.

Tema B: En la pregunta **2** se halló una base de $\mathcal{A}(3;\mathbb{R})$ que contiene tres vectores. Por lo tanto, $\dim \mathcal{A}(3;\mathbb{R}) = 3$.

Ejercicio II

1. Tema A: Se tiene $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, por lo que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

De la misma manera, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, por lo que $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

Tema B: Se tiene $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, por lo que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

De la misma manera, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, por lo que $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

2. Por definición, la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es la matriz A cuyas columnas son $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Para cualquier $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Tema A: $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$.

Tema B: $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$.

3. Tema A: $T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, $T^2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ y $T^3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

Tema B: $T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $T^2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ y $T^3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

4. Temas A y B: La matriz estándar de T^2 es $A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Tema A: La matriz estándar de $T^{101} = T \circ (T^2)^{50}$ es igual a $A(A^2)^{50} = A(I_2)^{50} = A$.
Tema B: La matriz estándar de $T^{100} = (T^2)^{50}$ es igual a $(A^2)^{50} = (I_2)^{50} = I_2$.

Ejercicio III

1. Tema A: Falso. La matriz estándar de T es $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$ que tiene rango 2 (sus 2 columnas no son proporcionales). Luego la imagen de T en $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 2 (es un plano, no una recta).

Tema B: Verdadero. La matriz estándar de T es $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ que tiene rango 2 (sus 2 columnas no son proporcionales). Luego la imagen de T en $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 2.

2. Temas A y B: Falso. La matriz A es fila-equivalente a la matriz $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, que tiene rango igual a 3. Luego $\operatorname{rg}(A) = 3$.

3. Se recuerde que el polinomio nulo es el polinomio cuyos coeficientes todos son nulos.

Tema A: Verdadero. Sea $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\lambda(1 + X) + \mu(1 + X^2) = 0$. Entonces $(\lambda + \mu) + \lambda X + \mu X^2 = 0$, por lo que $\lambda = \mu = 0$.

Tema B: Verdadero. Sea $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\lambda(1 + X) + \mu(X + X^2) = 0$. Entonces $\lambda + (\lambda + \mu)X + \mu X^2 = 0$, por lo que $\lambda = \mu = 0$.