Parcial 3 - Tema A

20 DE ABRIL 2013 MATE 1105

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Mostrar que el polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

2. Dé los valores propios de A e indique sus respectivas multiplicidades algebraicas.

3. Para cada valor propio λ de A, halle una base del sub-espacio propio correspondiente: $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$.

4. Diga si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $C^{-1}AC = D$ (se pide justificar que C es invertible).

5. Calcule $A^5 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio II

Se consideran los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,-1)$ y $B = (1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$ y se denota $\mathcal{P}$ el plano generado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

1. Halle el área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2. Halle una base de la recta $\mathcal{P}^\perp$ (el complemento ortogonal de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$).

3. Halle la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a la recta $\mathcal{P}^\perp$.

4. Halle la distancia entre el punto $C = (1,0,1)$ y el plano $\mathcal{P}$.

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces la matriz de la transformación lineal

$$T : \begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & P_2 \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

en la base canónica $(1, X, X^2)$ de P_2 es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, la matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es invertible.

Parcial 3 - Tema B

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Mostrar que el polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$.

2. Dé los valores propios de A e indique sus respectivas multiplicidades algebraicas.

3. Para cada valor propio λ de A, halle una base del sub-espacio propio correspondiente: $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$.

4. Diga si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $C^{-1}AC = D$ (se pide justificar que C es invertible).

5. Calcule $A^5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio II

Se consideran los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (1,-1,1)$ y $B = (1,1,-1)$ en $\mathbb{R}^3$ y se denota $\mathcal{P}$ el plano generado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

1. Halle el área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2. Halle una base de la recta $\mathcal{P}^\perp$ (el complemento ortogonal de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$).

3. Halle la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a la recta $\mathcal{P}^\perp$.

4. Halle la distancia entre el punto $C = (1,1,0)$ y el plano $\mathcal{P}$.

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces la matriz de la transformación lineal

$$T : \begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & P_2 \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

en la base canónica $(1, X, X^2)$ de P_2 es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & -x & 1 \end{bmatrix}$ es invertible.

Solución del tercer parcial

Ejercicio I

1. El polinomio característico de una matriz cuadrada A es $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.

Tema A:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & -6 \\ 6 & -4-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda)[(5-\lambda)(-4-\lambda)+18] \\ &= -(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-2] \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Tema B:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(-1-\lambda)(2-\lambda)-0] \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

2. Tema A: Ya que $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$, los valores propios de A son (-1) y 2. El valor propio (-1) tiene multiplicidad algebraica 2 y el valor propio 2 tiene multiplicidad algebraica 1.

Tema B: Ya que $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$, los valores propios de A son 2 y (-1). El valor propio 2 tiene multiplicidad algebraica 2 y el valor propio (-1) tiene multiplicidad algebraica 1.

3. Para hallar una base del sub-espacio propio correspondiente, $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$, se resuelve el sistema homogéneo asociado a la matriz $(A - \lambda I_3)$.

Tema A: Si $\lambda = -1$, $A - \lambda I_3 = A + I_3 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Si $\lambda = 2$, $A - \lambda I_3 = A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $E_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Tema B: Si $\lambda = -1$, $A - \lambda I_3 = A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Si $\lambda = 2$, $A - \lambda I_3 = A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $E_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

4. Se tiene $\dim E_{-1} + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, A es diagonalizable. Recordemos que, al concatenar las bases de E_{-1} y E_2 halladas anteriormente, por teorema se obtiene una familia libre de 3 vectores de $\mathbb{R}^3$, es decir una base de $\mathbb{R}^3$.

Tema A: Se forma $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Por definición de C y D y los resultados de la pregunta **3**, se tiene que $AC = CD$ y, por la observación anterior, que las columnas de C forman una base de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, C es invertible y $C^{-1}AC = D$.

Tema B: Se forma $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Por definición de C y D y los resultados de la pregunta **3**, se tiene que $AC = CD$ y, por la observación anterior, que las columnas de C forman una base de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, C es invertible y $C^{-1}AC = D$.

5. Tema A: Al expresar el vector propuesto en la base de $\mathbb{R}^3$ compuesta de vectores propios de A hallada anteriormente, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} A^5 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= A^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + A^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + A^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tema B: Al expresar el vector propuesto en la base de $\mathbb{R}^3$ compuesta de vectores propios de A hallada anteriormente, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} A^5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= A^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + A^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 31 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio II

1. El área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ es igual a la norma del producto cruz $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

Tema A: $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}$ luego $\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$.

Tema B: $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ luego $\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$.

2. Ya que $\mathcal{P}$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{BA}$, el vector $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ genera la recta $\mathcal{P}^{\perp}$. Cualquier vector proporcional a ése también funciona. Por ejemplo los siguientes vectores.

Tema A: $\mathcal{P}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Tema B: $\mathcal{P}^{\perp} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

3. Denotemos $\vec{a}$ la base de la recta $\mathcal{P}^{\perp}$ hallada en la pregunta **2**. Entonces la proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ a la recta $\mathcal{P}^{\perp}$ es el vector

$$p^{\perp}_{\mathcal{P}^{\perp}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\, \vec{a}.$$

Tema A: $\vec{v} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,\ \|a\|^2 = 2$ y

$$p^{\perp}_{\mathcal{P}^{\perp}}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tema B: $\vec{v}\cdot\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = 1,\ \|a\|^2 = 2$ y

$$p^{\perp}_{\mathcal{P}^{\perp}}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1/2\\1/2\end{bmatrix}.$$

4. Temas A y B: Ya que $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$, a distancia entre el punto $C = (1,0,1)$ y el plano $\mathcal{P}$ es igual a

$$\|\vec{v} - p^{\perp}_{\mathcal{P}}(\vec{v})\| = \|p^{\perp}_{\mathcal{P}^{\perp}}(\vec{v})\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ejercicio III

1. Temas A y B: Falso. La matriz de $T : P \longmapsto P'$ en la base canónica $(1, X, X^2)$ de P_2 es $A = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$.

2. Tema A: Falso. Se tiene $\det A = x-1+x-3 = 2x-4$ luego A es invertible si y sólo si $x \neq 2$.

Tema B: Verdadero. Se tiene $\det A = x - x + (-1) = -1 \neq 0$ por lo que A es invertible.