Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL (A) – 1105 – SOLUCIÓN

Noviembre 25 de 2014

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios son 0 y 2, es invertible.

FALSO. El determinante de la matriz es claramente 0, luego no puede ser invertible.

b. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios son 0 y 2, es diagonalizable.

VERDADERO. Para el valor propio $\lambda = 0$, que tiene multiplicidad algebraica 1, $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es vector propio; y para el valor propio $\lambda = 2$, que tiene multiplicidad algebraica 2, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores propios.

c. Si $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces la imagen de T es un subespacio vectorial de W.

VERDADERO. Sean $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in R(T) \subset W$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $\vec{w}_1 = T(\vec{v}_1), \vec{w}_2 = T(\vec{v}_2)$, para $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, y

$$a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2) = T(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) \in R(T),$$

luego $R(T)$, la imagen de T, es un subespacio vectorial de W.

(8 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a. Encuentre los valores propios y vectores propios de A.

Los valores propios de A son 1 y 3. Los vectores propios de A son (los múltiplos de) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para el valor propio 1, y $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para el valor propio 3.

b. Encuentre una diagonalización ortogonal de A.

Los vectores propios normalizados de A son $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, para el valor propio 1, y $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ para el valor propio 3. Así, una diagonalización ortogonal de A, usando una matriz de *rotación*, es:

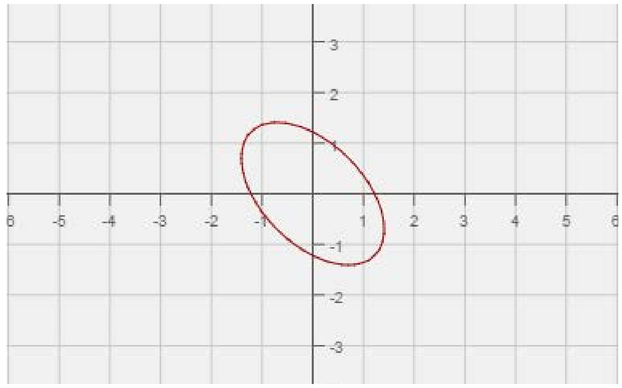
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

c. Use lo anterior para identificar la cónica $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ y trace precisamente la gráfica correspondiente.

La ecuación cuadrática original $2x^2 + 2xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$ se escribe, en las nuevas coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 + 3y'^2 = 3,$$

así que la cuadrática corresponde a una elipse rotada según $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, es decir 45° en sentido antihorario:



d. Calcule $A^5\vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dado que $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$A^5\vec{x} = (-1)A^5\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1)A^5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(1)^5\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1)(3)^5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3^5 \\ 3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3^5 \\ -1+3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244 \\ 242 \end{bmatrix}.$$

(6 Puntos) **III**. Considere la transformacin lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-2y-z \\ x-y+2z \\ x+5z \end{bmatrix}$$

a. Halle el núcleo (espacio nulo) de la transformación T.
Para encontrar el espacio nulo resolvemos el sistema homogeneo

$$\begin{aligned} x-2y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \\ x \quad\; +5z &= 0, \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$(A\,|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

y, aplicando el método de Gauss, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 - F_1}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

así que $N(T) = \mathsf{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

b. El vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ pertenece a la imagen de T?

Para saber si el vector dado es generado por las columnas de A resolvemos el sistema no homogeneo

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 4 \\ x - y + 2z &= -1 \\ x \quad + 5z &= 5, \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$(A\,|\vec{v}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

y, aplicando el método de Gauss, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \overset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 - F_1}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

así que $\vec{v} \notin R(T)$.

c. Halle la matriz de representación de la transformación T con respecto a las bases ordenadas $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Por definición, dado que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6 Puntos) **IV**. Sea $S = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Halle una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $S^\perp$.

Dado que $S^\perp = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, tenemos que $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortonormal para $S^\perp$ que, completada con el generador de S, da lugar a la base *ortonormal* $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$ para $\mathbb{R}^3$.

b. Encuentre la proyección ortogonal del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sobre el subespacio $S^\perp$.

Es fácil ver que $\mathsf{Proy}_S \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$, luego

$$\mathsf{Proy}_{S^\perp} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

c. Halle la distancia del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ al subespacio $S^\perp$.

La distancia pedida es la norma del vector $\mathsf{Proy}_S \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, i.e.

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL (B) – 1105 – SOLUCIÓN

Noviembre 25 de 2014

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios son 0 y 3, es invertible.

Falso. El determinante de la matriz es claramente 0, luego no puede ser invertible.

b. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios son 0 y 3, es diagonalizable.

Verdadero. Para el valor propio $\lambda = 0$, que tiene multiplicidad algebraica 1, $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es vector propio; y para el valor propio $\lambda = 3$, que tiene multiplicidad algebraica 2, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores propios.

c. Si $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces el núcleo (espacio nulo) de T es un subespacio vectorial de V.

Verdadero. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in N(T) \subset V$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$T(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2) = \vec{0},$$

luego $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \in N(T)$, y el espacio nulo de T es un subespacio vectorial de V.

(8 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a. Encuentre los valores propios y vectores propios de A. Los valores propios de A son 1 y 6. Los vectores propios de A son (los múltiplos de) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, para el valor propio 1, y $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ para el valor propio 6.

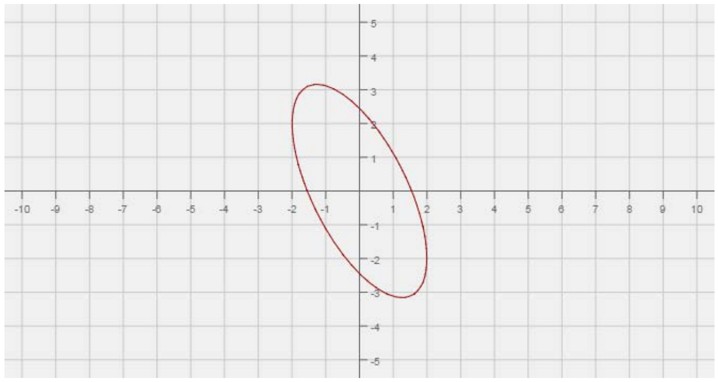
b. Encuentre una diagonalización ortogonal de A.
Los vectores propios normalizados de A son $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$, para el valor propio 1, y $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$ para el valor propio 6. Así, una diagonalización ortogonal de A, usando una matriz de *rotación*, es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

c. Use lo anterior para identificar la cónica $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 12$ y trace precisamente la gráfica correspondiente.
La ecuación cuadrática original $5x^2 + 4xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 12$ se escribe, en las nuevas coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 + 6y'^2 = 12,$$

así que la cuadrática corresponde a una elipse rotada según $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, es decir $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cong 63.4°$ en sentido antihorario:



d. Calcule $A^5\vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dado que $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$A^5\vec{x} = (-1)A^5\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (1)A^5\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(1)^5\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (1)(6)^5\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 6^5 \\ 6^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2\cdot 6^5 \\ 2 + 6^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15551 \\ 7778 \end{bmatrix}.$$

(6 Puntos) **III**. Considere la transformacin lineal

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ x - y - z \\ x + 2z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a. Halle el núcleo (espacio nulo) de la transformación T.
Para encontrar el espacio nulo resolvemos el sistema homogeneo

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ x \quad + 2z &= 0, \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$(A\,|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

y, aplicando el método de Gauss, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to 2F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 2F_3 - F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

así que $N(T) = \mathsf{Sp}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

b. El vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ pertenece a la imagen de T?

Para saber si el vector dado es generado por las columnas de A resolvemos el sistema no homogeneo

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ x - y - z &= -1 \\ x \quad + 2z &= 5, \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$(A\,|\vec{v}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

y, aplicando el método de Gauss, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \overset{F_2 \to 2F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \overset{F_3 \to 2F_3 - F_1}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 + F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

así que el sistema tiene infinitas soluciones, luego el vector dado *si* pertenece al espacio generado por las columnas de A.

c. Halle la matriz de representación de la transformación T con respecto a las bases ordenadas $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Por definición, dado que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6 Puntos) **IV**. Sea $S = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Halle una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $S^\perp$.

Dado que $S^\perp = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, tenemos que $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortonormal para $S^\perp$ que, completada con el generador de S, da lugar a la base *ortonormal* $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$ para $\mathbb{R}^3$.

b. Encuentre la proyección ortogonal del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sobre el subespacio $S^{\perp}$.

Es fácil ver que $\mathsf{Proy}_S \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, luego

$$\mathsf{Proy}_{S^{\perp}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

c. Halle la distancia del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ al subespacio $S^{\perp}$.

La distancia pedida es la norma del vector $\mathsf{Proy}_S \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, i.e.

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$