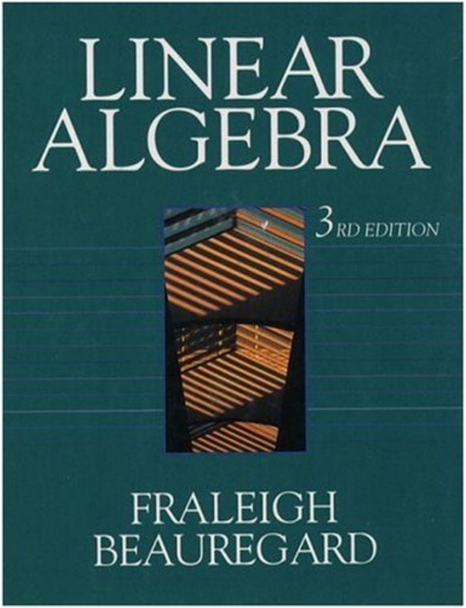
# Álgebra Lineal

Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes

Primer Semestre de 2007

Texto guía:



# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

**Definición**

*Un vector en $\mathbb{R}^n$ es un arreglo ordenado de n números reales. Podemos escribir un vector como la lista de sus componentes $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o, equivalentemente, como una columna*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Podemos sumar dos vectores del mismo tamaño, y también multiplicar vectores por números...

# Operaciones elementales

## Suma y producto por escalares

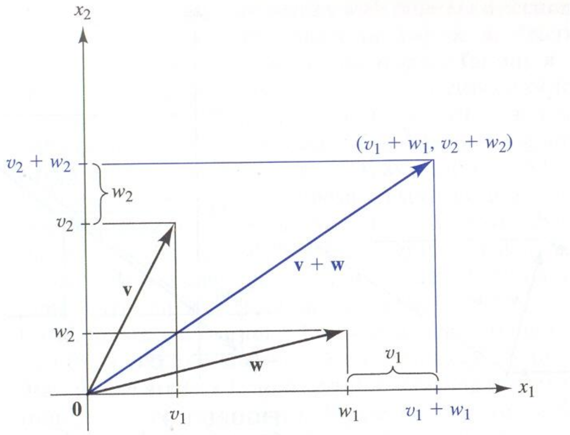
Dos vectores $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se suman de acuerdo con la regla:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

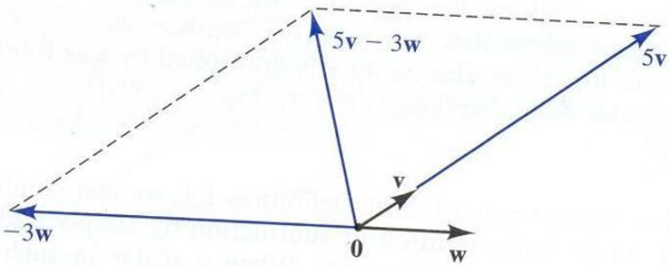
Un vector $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ se multiplica por un escalar $r \in \mathbb{R}$ según:

$$r \cdot \vec{v} = (rv_1, \ldots, rv_n).$$

Gráficamente, la suma en $\mathbb{R}^2$ se representa



Así, por ejemplo,



## Teorema (Propiedades de la adición vectorial)

*Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *Asociatividad:*

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

# Propiedades de las operaciones elementales

## Teorema (Propiedades de la adición vectorial)

*Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *Asociatividad:*

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

2. *Conmutatividad:*

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

## Teorema (Propiedades de la adición vectorial)

*Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$

# Propiedades de las operaciones elementales

## Teorema (Propiedades de la adición vectorial)

*Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$
4. *Existencia de inverso aditivo:*
$$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$$

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

## Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distributividad:* $r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$

## Demostración

De ahora en adelante escribiremos $r \cdot \vec{v} = r\vec{v}$.

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

## Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distribitividad:* $r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$
2. *Distributividad:* $(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$

## Demostración

De ahora en adelante escribiremos $r \cdot \vec{v} = r\vec{v}$.

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

## Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distribitividad:* $r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$
2. *Distributividad:* $(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$
3. *Asociatividad:* $r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (rs) \cdot \vec{v}$

## Demostración

De ahora en adelante escribiremos $r \cdot \vec{v} = r\vec{v}$.

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

## Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distribitividad:* $r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$
2. *Distributividad:* $(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$
3. *Asociatividad:* $r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (rs) \cdot \vec{v}$
4. *Existencia de unidad multiplicativa:* $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

## Demostración

*Se demuestra directamente apartir de la definición de la suma y multiplicación por escalares.*

De ahora en adelante escribiremos $r \cdot \vec{v} = r\vec{v}$.

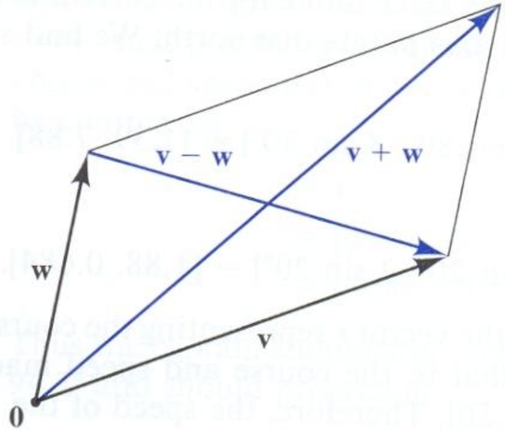
## Definición

*Una combinación lineal de $n$ vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ en $\mathbb{R}^n$ es un vector que se puede escribir de la forma*

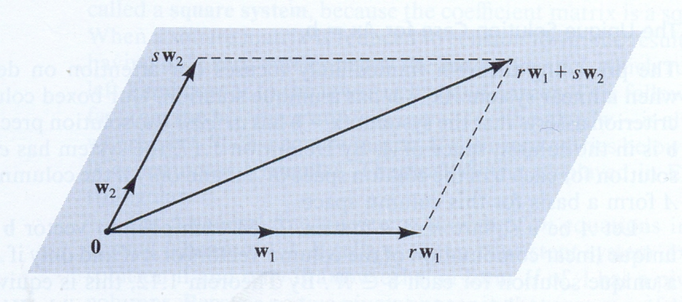
$$\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n,$$

*donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son escalares reales.*

Un ejemplo sencillo de combinación lineal de dos vectores es



En general, dos vectores $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ en $\mathbb{R}^n$ generan un plano que pasa por el origen cuando no son paralelos (no son uno un múltiplo del otro):




Cada vector en tal plano puede escribirse como una combinación lineal apropiada de los vectores $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$.

## Definición

*El espacio generado por $k$ vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto*

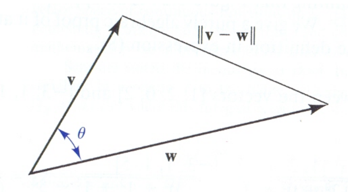
$$Sp\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k) = \{r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_k\vec{v}_k \mid r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}\},$$

*de todas las combinaciones lineales de tales vectores.*

## Ejemplo

- *Un vector (no nulo) genera una recta.*
- *Dos vectores (no paralelos) generan un plano.*

# Cómo hacer geometría en $\mathbb{R}^n$?




En el plano o el espacio las distancias y los ángulos son medidos mediante una operación llamada producto escalar, en $\mathbb{R}^n$ procedemos en forma similar:

## Definición

*La norma o magnitud de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ se define como*

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

## Definición

*El producto punto entre 2 vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{R}^n$ es el número real*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Obsérvese que, usando el producto punto, podemos escribir la norma de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$\| \vec{v} \| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}}.$$

Recordemos que, en el plano, dados dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$,

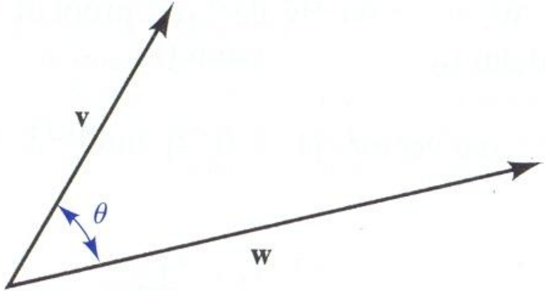
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \| \vec{v}_1 \| \| \vec{v}_2 \| \cos\theta,$$

donde $\theta$ es el ángulo entre los vectores. Usaremos tal identidad para definir el ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$...

## Definición

*Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^n$, definimos el ángulo entre ellos como*

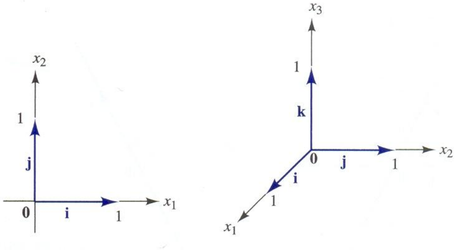
$$\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \operatorname{arccos}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\| \vec{v} \| \| \vec{w} \|}\right).$$



## En particular...

- Si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ decimos que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales o perpendiculares.
- Si $\vec{v} = r\vec{w}$, donde $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq 0)$, decimos que son paralelos.

Un ejemplo sencillo de vectores perpendiculares, en (a) $\mathbb{R}^2$ y (b) $\mathbb{R}^3$, es el siguiente




(a) (b)

# Propiedades de la norma y el producto punto

## Teorema

*Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Conmutatividad:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.

## Demostración

Estas propiedades del producto punto implican las siguientes propiedades de la norma...

# Propiedades de la norma y el producto punto

## Teorema

*Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Conmutatividad:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. *Distributividad:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

## Demostración

Estas propiedades del producto punto implican las siguientes propiedades de la norma...

# Propiedades de la norma y el producto punto

## Teorema

*Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Conmutatividad:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. *Distributividad:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
3. *Homogeneidad:* $r(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (r\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (r\vec{w})$.

## Demostración

Estas propiedades del producto punto implican las siguientes propiedades de la norma...

# Propiedades de la norma y el producto punto

## Teorema

*Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Conmutatividad:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. *Distributividad:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
3. *Homogeneidad:* $r(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (r\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (r\vec{w})$.
4. *Positividad:* $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ *y* $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ *si y solamente si* $\vec{v} = \vec{0}$.

## Demostración

*Directa a partir de la definición.*

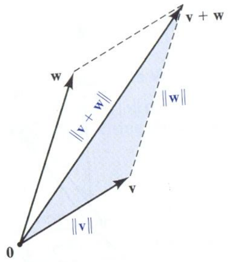
Estas propiedades del producto punto implican las siguientes propiedades de la norma...

# Propiedades de la norma

## Teorema

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Positividad:* $\| \vec{v} \| \geq 0$ *y* $\| \vec{v} \| = 0$ *si y solamente si* $\vec{v} = \vec{0}$.

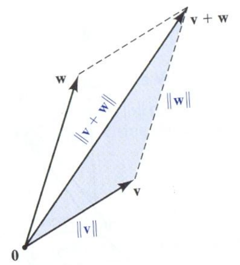


# Propiedades de la norma

## Teorema

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Positividad:* $\| \vec{v} \| \geq 0$ *y* $\| \vec{v} \| = 0$ *si y solamente si* $\vec{v} = \vec{0}$.
2. *Homogeneidad:* $\| r\vec{v} \| = | r | \| \vec{v} \|$.



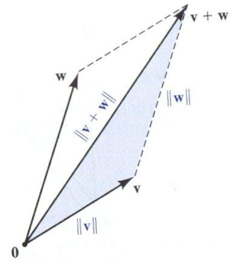
# Propiedades de la norma

## Teorema

*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Positividad:* $\| \vec{v} \| \geq 0$ *y* $\| \vec{v} \| = 0$ *si y solamente si* $\vec{v} = \vec{0}$.
2. *Homogeneidad:* $\| r\vec{v} \| = | r | \| \vec{v} \|$.
3. *Desigualdad del triangulo:*

$$\| \vec{v} + \vec{w} \| \leq \| \vec{v} \| + \| \vec{w} \| .$$



# Propiedades de la norma

## Teorema

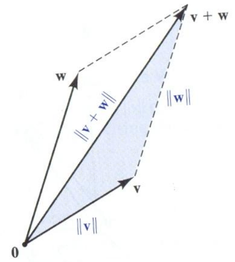
*Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $r$ un escalar. Entonces:*

1. *Positividad:* $\| \vec{v} \| \geq 0$ *y* $\| \vec{v} \| = 0$ *si y solamente si* $\vec{v} = \vec{0}$.
2. *Homogeneidad:* $\| r\vec{v} \| = | r | \| \vec{v} \|$.
3. *Desigualdad del triangulo:*

$$\| \vec{v} + \vec{w} \| \leq \| \vec{v} \| + \| \vec{w} \| .$$

4. *Desigualdad de Schwarz:*

$$| \vec{v} \cdot \vec{w} | \leq \| \vec{v} \| \| \vec{w} \| .$$



# Matrices y su álgebra

## Definición

*Una* *matriz* $m \times n$ *es un arreglo ordenado rectangular de números reales con* $m$ *filas y* $n$ *columnas:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matriz también puede denotarse $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y, en algunos casos, también denotaremos por $(A)_{ij}$ la entrada $ij$ de la matriz $A$. Llamaremos $M_{mn}(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices $m \times n$ con entradas (o componentes) reales.

Al igual que los vectores, podemos sumar dos matrices del mismo tamaño, y también multiplicar matrices por números...

# Operaciones elementales con matrices

## Suma de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ en $M_{mn}(\mathbb{R})$ se suman de acuerdo con la regla:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.
$$

## Producto por escalares

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se multiplica por un escalar $r \in \mathbb{R}$ según:

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

# Propiedades de las operaciones elementales con matrices

## Teorema (Propiedades de la suma)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices $m \times n$, entonces*

1. *Asociatividad:*

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

# Propiedades de las operaciones elementales con matrices

## Teorema (Propiedades de la suma)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices $m \times n$, entonces*

1. *Asociatividad:*
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
2. *Conmutatividad:*
$$A + B = B + A$$

# Propiedades de las operaciones elementales con matrices

## Teorema (Propiedades de la suma)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices $m \times n$, entonces*

1. *Asociatividad:*
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
2. *Conmutatividad:*
$$A+B = B+A$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$A+O = O+A = A$$

# Propiedades de las operaciones elementales con matrices

## Teorema (Propiedades de la suma)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices $m \times n$, entonces*

1. *Asociatividad:*
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
2. *Conmutatividad:*
$$A + B = B + A$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$A + O = O + A = A$$
4. *Existencia de inverso aditivo:*
$$A + (-A) = O.$$

En los anunciados anteriores la matriz O es la matriz cuyas entradas son todas cero:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz $-A$ es la matriz cuyas entrada $ij$ es $-a_{ij}$:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

## Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)

*Sean $A$ y $B$ matrices $m \times n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distribitividad:* $r(A + B) = rA + rB$

## Demostración

También es posible multiplicar matrices, cuando ellas tienen el tamaño adecuado...

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

## Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)

*Sean $A$ y $B$ matrices $m \times n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distribitividad:* $r(A + B) = rA + rB$
2. *Distributividad:* $(r + s)A = rA + sA$

## Demostración

También es posible multiplicar matrices, cuando ellas tienen el tamaño adecuado...

# Propiedades de las operaciones elementales (continuación)

**Teorema (Propiedades de la multiplicación por escalares)**

*Sean $A$ y $B$ matrices $m \times n$, y sean $r$ y $s$ escalares en $\mathbb{R}$.*

1. *Distribitividad*: $r(A + B) = rA + rB$
2. *Distributividad*: $(r + s)A = rA + sA$
3. *Asociatividad*: $r(sA) = (rs)A$.

**Demostración**

*Se demuestra directamente apartir de la definición de la suma y multiplicación por escalares.*

También es posible multiplicar matrices, cuando ellas tienen el tamaño adecuado...

# Multiplicación de matrices

## Definición

*Sean $A_{m\times n}$ y $B_{n\times l}$ matrices $m \times n$ y $n \times l$, respectivamente, es decir que el número de columnas de $A$ es igual al número de filas de $B$. La matriz producto $AB$ es la matriz cuya componente $ij$ está dada por el producto (como vectores) de la $i$-ésima fila de $A$ por la $j$-ésima columna de $B$. Es decir:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \mathbf{b}_{1j} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & \cdots & \mathbf{b}_{2j} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \mathbf{b}_{nj} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Así, por ejemplo, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{\mathbf{4}\times 3} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 2 \\ -1 & \mathbf{10} \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{\mathbf{4}\times\mathbf{2}},$$

donde la tercera fila y segunda columna ha sido calculada según la fórmula dada anteriormente, i.e.

$$\begin{aligned} (AB)_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\ &= (4)(0) + (3)(4) + (2)(-1) = \mathbf{10}. \end{aligned}$$

# Transposición de matrices

## Definición

*Sea* $A = (a_{ij})$ *una matriz en* $M_{mn}(\mathbb{R})$, *la* *transpuesta* *de* $A$, *denotada* $A^T$, *es la matriz* $A^T = (a_{ji}) \in M_{mn}(\mathbb{R})$, *i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

## Ejemplo

*Para la matriz* $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *tenemos que* $B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

## Atención!

Obsérvese que, en el ejemplo anterior, aunque se puede definir el producto $AB$ no es posible definir $BA$!

Así, solo están definidos ambos productos, $AB$ y $BA$, cuando las matrices son cuadradas y del mismo tamaño. En general,

$$AB \neq BA,$$

luego la multiplicación de matrices no es conmutativa.

# Algunas Propiedades de la multiplicación matricial y la transposición

Así como existe una *identidad* para la suma de matrices (la matriz O), existe una matriz que juega el mismo papel respecto a la multiplicación:

## Definición

*La matriz identidad (de tamaño $n \times n$) es la matriz diagonal*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que, para cualquier matriz $A$ de tamaño $m \times n$,

$$A\,\mathrm{I} = A.$$

## Teorema (Propiedades de la multiplicación matricial)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices y $r$ un escalar, entonces*

1. *Asociatividad:* $(AB)C = A(BC)$

## Teorema (Propiedades de la multiplicación matricial)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices y $r$ un escalar, entonces*

1. *Asociatividad:* $(AB)C = A(BC)$
2. *Distributividad a izquierda:*

$$A(B + C) = AB + AC$$

## Teorema (Propiedades de la multiplicación matricial)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices y $r$ un escalar, entonces*

1. *Asociatividad:* $(AB)C = A(BC)$
2. *Distributividad a izquierda:*

$$A(B + C) = AB + AC$$

3. *Distributividad a derecha:*

$$(A + B)C = AC + BC$$

## Teorema (Propiedades de la multiplicación matricial)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices y $r$ un escalar, entonces*

1. *Asociatividad:* $(AB)C = A(BC)$
2. *Distributividad a izquierda:*
$$A(B+C) = AB + AC$$
3. *Distributividad a derecha:*
$$(A+B)C = AC + BC$$
4. *Distributividad de escalares:* $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

## Teorema (Propiedades de la multiplicación matricial)

*Sean $A, B$ y $C$ tres matrices y $r$ un escalar, entonces*

1. *Asociatividad:* $(AB)C = A(BC)$
2. *Distributividad a izquierda:*
$$A(B + C) = AB + AC$$
3. *Distributividad a derecha:*
$$(A + B)C = AC + BC$$
4. *Distributividad de escalares:* $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
5. *Identidad multiplicativa:* $IA = AI = A$.

De ahora en adelante, cada vez que un producto matricial sea indicado, se asume que las matrices tienen el tamaño indicado para que su producto esté bien definido.

## Teorema (Propiedades de la transpoción)

*Sean A y B dos matrices. Entonces*

1. $$(A^T)^T = A$$

## Teorema (Propiedades de la transpoción)

*Sean A y B dos matrices. Entonces*

1. $$(A^T)^T = A$$

2. $$(A+B)^T = A^T + B^T$$

## Teorema (Propiedades de la transpoción)

*Sean $A$ y $B$ dos matrices. Entonces*

1. $$(A^T)^T = A$$

2. $$(A+B)^T = A^T + B^T$$

3. $$(AB)^T = B^T A^T.$$

Veamos con detalle la prueba de la última de las propiedades enunciadas en el teorema (las dos primeras pueden verificarse directamente).

## Demostración

*Sean* $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{R})$ *y* $B = (b_{rs}) \in M_{nk}(\mathbb{R})$ *dos matrices arbitrarias, luego podemos multiplicarlas para obtener* $AB \in M_{mk}(\mathbb{R})$. *Tenemos que probar que las matrices* $(AB)^T$ *y* $B^T A^T$ *son iguales, es decir que cada una de las entradas de* $(AB)^T$ *es igual a la entrada correspondiente de* $B^T A^T$, *i.e.*

$$(AB)^T_{ij} = (B^T A^T)_{ij} \quad \forall 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq k.$$

*Pero*

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{jl} (B)_{li} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{li}$$

*y, por otra parte,*

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (B^T)_{il} (A^T)_{lj} = \sum_{l=1}^{n} b_{li} a_{jl},$$

*luego hemos demostrado lo que queríamos.*

## Definición

*Una matriz $A$ es llamada simétrica si*

$$A = A^T.$$

Toda matriz $A$ simétrica es necesariamente cuadrada y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{12} & a_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{1n} & \mathbf{a}_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

# El producto punto como multiplicación matricial

Dado que los vectores son matrices con una sola columna columna,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = M_{n1}(\mathbb{R}),$$

podemos escribir el producto escalar de dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ como un producto de matrices:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

## Una observación importante...

Si $A$ es una matriz $m \times n$ y $B$ es una matriz $n \times k$, podemos calcular el producto $AB$ mediante la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_k \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde los vectores $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}$ son los vectores columna de la matriz $B$. Esta observación será fundamental para entender el rol de las matrices como transformaciones lineales más adelante.

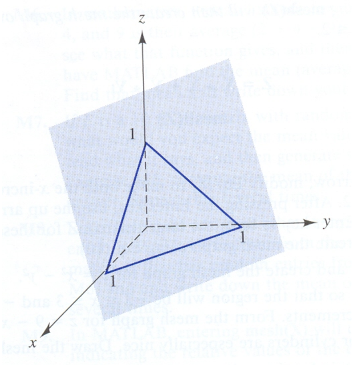
# Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal en $n$ variables es una ecuación de la forma

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = a,$$

donde los coeficientes $r_1, \ldots, r_n, a \in \mathbb{R}$ son conocidos y las variables $x_1, \ldots, x_n$ son llamadas incógnitas.

Cada ecuación lineal representa un lugar geométrico. Por ejemplo, la ecuación $x + y + z = 1$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$:



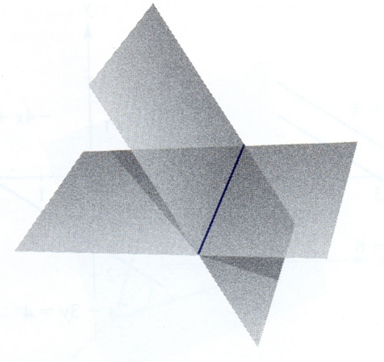
# Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de $m$ ecuaciones lineales en $n$ variables es una colección de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ son números reales conocidos para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ y $0 \leq k \leq m$.

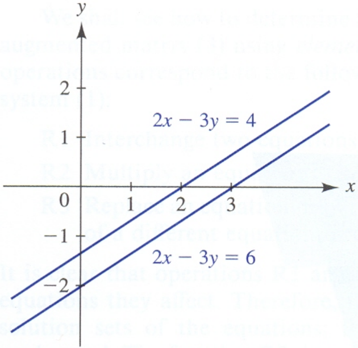
Tener varias ecuaciones lineales es tener varios lugares geométricos en $\mathbb{R}^n$, y queremos usar el álgebra matricial para estudiarlos. Por ejemplo, dos ecuaciones lineales "diferentes" en $\mathbb{R}^3$ representan dos planos cuaya intersección es una recta:

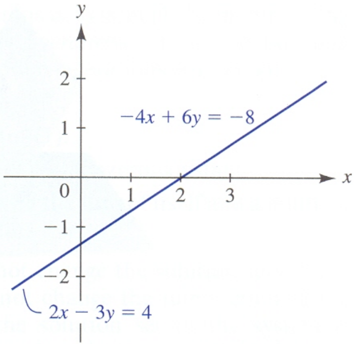


Solucionar el sistema significa encontrar tal recta...

... pero, aunque pueden existir soluciones, también puede pasar que no existan soluciones, o que existan infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 4 \\ 2x - 3y &= 6 \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} 2x - 3y = & 4 \\ -4x + 6y & = -8 \end{cases}$$



Un sistema de $m$ ecuaciones lineales en $n$ incógnitas

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \quad &= \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

puede escribirse en forma compacta en notación matricial como $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Vamos a definir, a partir de la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$, una matriz aumentada y una serie de operaciones elementales que nos permitirán encontrar las soluciones al sistema (en caso de que existan). Este método es conocido como reducción de Gauss-Jordan.

## Definición

*La matriz aumentada asociada al sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es la matriz*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

*que escribiremos en forma abreviada como $(A\,|\,\vec{b})$.*

Como indicamos en un ejemplo anterior, multiplicar por un escalar una ecuación lineal no modifica el lugar geométrico que representa (las rectas definidas por $2x - 3y = 4$ y $-4x + 6y = -8$ son la misma). En general, dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

hay dos operaciones elementales que no alteran el lugar geométrico definido por ellas:

**Operaciones Elementales**

1. Multiplicar una ecuación por un escalar (diferente de cero),

Como indicamos en un ejemplo anterior, multiplicar por un escalar una ecuación lineal no modifica el lugar geométrico que representa (las rectas definidas por $2x - 3y = 4$ y $-4x + 6y = -8$ son la misma). En general, dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

hay dos operaciones elementales que no alteran el lugar geométrico definido por ellas:

**Operaciones Elementales**

1. Multiplicar una ecuación por un escalar (diferente de cero),
2. Sumar (un múltiplo de) una ecuación del sistema con (un múltiplo de) otra.

Las operaciones descritas anteriormente dan lugar, en la notación de matriz aumentada para el sistema, a las siguientes operaciones elementales entre filas:

## Operaciones elementales entre filas

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Las siguientes son las operaciones elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera,

Las operaciones descritas anteriormente dan lugar, en la notación de matriz aumentada para el sistema, a las siguientes operaciones elementales entre filas:

## Operaciones elementales entre filas

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Las siguientes son las operaciones elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera,
2. Multiplicar una fila por un escalar (diferente de cero),

Las operaciones descritas anteriormente dan lugar, en la notación de matriz aumentada para el sistema, a las siguientes operaciones elementales entre filas:

## Operaciones elementales entre filas

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Las siguientes son las operaciones elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera,
2. Multiplicar una fila por un escalar (diferente de cero),
3. Sumar (un múltiplo de) una fila con (un múltiplo de) otra.

## Ejemplo

*Para ilustrar las operaciones elementales entre filas, y su efecto sobre los sistemas de ecuaciones lineales, obsérvese que para encontrar el punto de intersección entre las rectas* $\ell_1 : 2x - y = 0$ *y* $\ell_2 : x + y = 3$ *en el plano, es decir un punto* $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ *cuyas coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones, podemos sumar ambas ecuaciones para obtener*

$$3x = 3,$$

*luego* $x_o = 1$ *y, de la ecuación de* $\ell_2$*, tenemos que* $y_o = 2$*.*
*En términos de la matriz aumentada asociada al sistema*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

*tenemos*

## Ejemplo (continuación)

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

*y, haciendo tres operaciones elementales, obtenemos*

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{3} \times F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (I\,|\,\vec{a}),$$

*donde el vector* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *tiene como componentes las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas* $\ell_1$ *y* $\ell_2$*, es decir la solución al sistema.*

Lo anterior no es sino una ilustración del siguiente

## Teorema

*Si dos matrices aumentadas $(A\,|\vec{b})$ y $(B\,|\vec{a})$, correspondientes a dos sistemas de ecuaciones lineales, son equivalentes bajo operaciones elementales entre filas, entonces los sistemas de ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Dado que (cuando hay tantas ecuaciones como incógnitas) la solución a un sistema de ecuaciones se escribe mediante la matriz identidad aumentada

$$(I\,|\vec{a}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{array}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{c} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n \end{array}$$

el objetivo al hacer operaciones elementales entre filas, en una matriz aumentada, será lograr una matriz lo más parecida posible a la matriz identidad. Llamaremos tal matriz escalonada por filas.

## Definición

*Una matriz está en forma escalonada por filas si:*

1. *Todas las filas conteniendo solo ceros apareces bajo las filas que contienen entradas diferentes de cero.*
2. *La primera entrada diferente de cero en cualquier fila (llamada pivote) aparece en la columna a la derecha de la primera entrada no nula en cualquier fila anterior.*

## Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*No está en forma escalonada por filas.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Si está en forma escalonada por filas.*

# Reducción de Gauss-Jordan

Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, con matriz aumentada $(A|\vec{b})$, el método de reducción de Gauss-Jordan indica la forma más sencilla de encontrar las soluciones al sistema: encontrando una matriz aumentada escalonada por filas, a partir de la matriz $(A|\vec{b})$, y despejando cada incógnita en el número mínimo de variables libres.

## Ejemplo

*Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \quad -2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

*cuya matriz aumentada asociada es*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

## Ejemplo (continuación)

*Haciendo operaciones elementales entre filas tenemos*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

*que está en forma escalonada por filas. Las ecuaciones lineales correspondientes son*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*luego, de la segunda ecuación deducimos que* $4x_2 = -3x_3$ *y, con tal resultado usado en la primera, tenemos que*

$$x_1 = 1 + 2x_3.$$

## Ejemplo (continuación)

*Así, tenemos que*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_3 \\ x_2 &= -\frac{3}{4}x_3 \end{aligned}$$

*y no es posible eliminar la variable libre* $x_3$, *que para cada valor real da lugar a una* *solución particular* *del sistema. Por ejemplo, para* $x_3 = 4$, $x_1 = 9$ *y* $x_2 = -3$, *luego* $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *es una solución particular. La* *solución general* *del sistema es*

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 \\ -\frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Podemos aplicar lo visto anteriormente para saber si, dado un vector fijo $\vec{v}_o \in \mathbb{R}^n$, éste se encuentra en el espacio generado por otros vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Recordemos que $\vec{v}_o \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ cuando existen escalares $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v}_o = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k$$

luego, si escribimos cada vector en términos de sus componentes

$$\vec{v}_o = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots \ , \ \vec{v}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

luego decidir si $\vec{v}_o \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ es equivalente a solucionar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k &= b_m.
\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado el siguiente

**Teorema**

*Sea $A \in M_{mk}(\mathbb{R})$ una matriz y $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $k$ incógnitas. Entonces el sistema es consistente (i.e. tiene soluciones) si y solamente si el vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ pertenece al espacio generado por las columnas de $A$.*

## Ejemplo

*Queremos saber si* $\vec{x}_o = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ *pertenece al espacio generado por los vectores* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *o, equivalentemente, si el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

*tiene soluciones. La matriz aumentada del sistema es*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right),$$

## Ejemplo (continuación)

*luego, haciendo reducción de Gauss-Jordan tenemos*

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

*que está en forma escalonada por filas. Las ecuaciones lineales correspondientes son*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ x_2 - 3x_3 &= -5 \\ -3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

*luego* $x_3 = 3$, *de la segunda ecuación deducimos que* $x_2 = 4$ *y, con tal resultado usado en la primera, tenemos que* $x_1 = -1$.

## Ejemplo (continuación)

*Lo anterior significa que hay una solución única,* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$*, que contiene los coeficientes escalares necesarios para escribir el vector* $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ *como combinación lineal de los vectores* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$*. De hecho,*

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (4)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (3)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

*como puede verificarse directamente.*

En general, dado un sistema de ecuaciones lineales, el método de reducción de Gauss-Jordan nos conduce a tres posibilidades a la hora de buscar sus soluciones:

1. El sistema tiene una única solución
2. El sistema tiene infinitas soluciones
3. El sistema no tiene ninguna solución.

El siguiente teorema nos dice a qué tipo de resultado en la reducción corresponde cada una de estas situaciones.

## Teorema (Resumen)

*Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma*

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

*con matriz aumentada* $(A|\vec{b}) \sim (B|\vec{a})$*, donde* $B$ *es una matriz escalonada por filas obtenida por el método de reducción de Gauss-Jordan, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta*

1. *La matriz aumentada* $(B|\vec{a})$ *tiene una fila con todas las entradas iguales a cero a la izquierda y un escalar diferente de cero a la derecha. Entonces llamamos al sistema* ***inconsistente*** *y decimos que no tiene* ***ninguna*** *solución.*

## Teorema (Resumen)

*Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma*

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

*con matriz aumentada* $(A|\vec{b}) \sim (B|\vec{a})$, *donde* $B$ *es una matriz escalonada por filas obtenida por el método de reducción de Gauss-Jordan, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta*

1. *La matriz aumentada* $(B|\vec{a})$ *tiene una fila con todas las entradas iguales a cero a la izquierda y un escalar diferente de cero a la derecha. Entonces llamamos al sistema inconsistente y decimos que no tiene ninguna solución.*
2. *La matriz* $B$ *contiene un pivote en cada columna. En este caso decimos que el sistema es consistente y tiene una única solución.*

## Teorema (Resumen)

*Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma*

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

*con matriz aumentada $(A|\vec{b}) \sim (B|\vec{a})$, donde $B$ es una matriz escalonada por filas obtenida por el método de reducción de Gauss-Jordan, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta*

1. *La matriz aumentada $(B|\vec{a})$ tiene una fila con todas las entradas iguales a cero a la izquierda y un escalar diferente de cero a la derecha. Entonces llamamos al sistema inconsistente y decimos que no tiene ninguna solución.*
2. *La matriz $B$ contiene un pivote en cada columna. En este caso decimos que el sistema es consistente y tiene una única solución.*
3. *La matriz $B$ contiene alguna columna sin pivote. En este caso decimos que el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.*

# La inversa multiplicativa de una matriz

## Definición

*Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada $n \times n$. Decimos que $A$ es invertible, y que su inversa es la matriz $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, si*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

*donde $I \in M_n(\mathbb{R})$ denota la matriz identidad $n \times n$. Si $A$ no es invertible la llamamos singular.*

Obsérvese que, en general, si existen dos matrices $C$ y $D$ tales que

$$AC = DA = I,$$

entonces

$$DAC = (DA)C = IC = C$$
$$DAC = D(AC) = DI = D,$$

luego $D = C$, i.e. las inversas de $A$ a izquierda y a derecha deben ser iguales.

Por otra parte, supongamos que existen dos matrices inversas para $A$, es decir $C$ y $D$ tales que

$$AC = CA = I \quad y \quad AD = DA = I.$$

Entonces

$$AC = CA$$

y multipicando a izquierda a ambos lados por $D$ tenemos

$$D(AC) = D(CA)$$

$$(DA)C = D(CA)$$

$$IC = DI,$$

luego $C = D$ y hemos demostrado el siguiente

**Teorema**

*La inversa de una matriz cuadrada, cuando existe, es única.*

Supongamos que queremos encontrar la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es decir una matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tal que

$$AA^{-1} = I.$$

Explícitamente, escribamos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que podemos escribir como el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 \\ ay + bw &= 0 \\ cx + dz &= 0 \\ cy + dw &= 1 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d & 1 \end{array}\right)$ que, multiplicando las dos primeras filas por $c$ y las dos últimas por $a$ es $\left(\begin{array}{cccc|c} ac & 0 & bc & 0 & c \\ 0 & ac & 0 & bc & 0 \\ ac & 0 & ad & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 & ad & a \end{array}\right)$.

El método de reducción de Gauss-Jordan nos da como resultado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ad-bc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{ad-bd} \end{array}\right),$$

luego la matriz $A$ es invertible solamente cuando $ad - bc \neq 0$ y en tal caso su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

El método utilizado en el ejemplo anterior muestra que el problema de invertir una matriz cuadrada puede escribirse y solucionarse en términos de sistemas de ecuaciones lineales, mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. En general tenemos

## Cálculo de inversas

Sea $A$ una matriz cuadrada, para calcular su inversa siga los siguientes pasos:

1. Forme una matriz aumentada con la matriz identidad de tamaño correspondiente $(A \mid I)$.

El método utilizado en el ejemplo anterior muestra que el problema de invertir una matriz cuadrada puede escribirse y solucionarse en términos de sistemas de ecuaciones lineales, mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. En general tenemos

## Cálculo de inversas

Sea $A$ una matriz cuadrada, para calcular su inversa siga los siguientes pasos:

1. Forme una matriz aumentada con la matriz identidad de tamaño correspondiente $(A \mid I)$.
2. Aplique el método de Gauss-Jordan $(A \mid I)$ para reducir la matriz aumentada a la forma $(I \mid C)$. Cuando la reducción puede llevarse a cabo completamente, la matriz apareciendo a la derecha será la inversa de $A$ (i.e. $C = A^{-1}$), si la reducción completa no es posible, la matriz $A$ no tendrá inversa.

Encontremos, a manera de ejemplo, la inversa de la matriz
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Tomamos la matriz aumentada

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y la reducimos usando el método de Gauss-Jordan hasta encontrar a la izquierda la matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to (-1)\times F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to (-1)\times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right),$$

luego la matriz es efectivamente invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dado un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas de la forma

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

conocer la matriz inversa de $A$ puede ayudar a encontrar facilmente la solución. En efecto, si $A^{-1}$ existe, multiplicando a izquierda ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

luego

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

sería la solución al sistema.

### Ejemplo

*Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

*que podemos escribir en forma matricial como*

## Ejemplo (continuación)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

*Según vimos anteriormente, la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *tiene inversa ya que* $(2)(1) - (-1)(1) = 3 \neq 0$, *y su inversa es*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

*luego la solución al sistema puede encontrarse haciendo*

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

*solución que anteriormente obtuvimos por otros métodos.*

Para terminar, enunciaremos un teorema que resume lo que sabemos del procedimoento de inversión de matrices...

## Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*

## Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*
2. *La matriz $A$ es equivalente por filas a la matriz identidad.*

## Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*
2. *La matriz $A$ es equivalente por filas a la matriz identidad.*
3. *El sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*

## Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*
2. *La matriz $A$ es equivalente por filas a la matriz identidad.*
3. *El sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*
4. *El espacio generado por las columnas de $A$ es $\mathbb{R}^n$.*

# Sistemas Homogeneos

## Definición

*Un sistema de ecuaciones lineales* $A\vec{x} = \vec{b}$ *es llamado* ***homogeneo*** *si* $\vec{b} = \vec{0}$, *es decir si tiene la forma*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Un sistema homogeneo tiene (por lo menos) una solución: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

luego, en general, queremos saber si esta es la única solución o hay (infinitas) mas.

## Teorema

*Sea $A\vec{x} = \vec{0}$ un sistema homogeneo de ecuaciones lineales. Si $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son soluciones al sistema, entonces también es solución cualquier combinación lineal de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$.*

*Prueba.* Para demostrar el teorema tomemos una combinación lineal arbitraria

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2$$

de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ y verifiquemos que satisface $A(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2) = \vec{0}$. En efecto, según las leyes de la multiplicación matricial,

$$A(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2) = a_1A(\vec{x}_1) + a_2A(\vec{x}_2),$$

y como tanto $\vec{x}_1$ como $\vec{x}_2$) son solución al sistema (es decir $A\vec{x}_1 = \vec{0}$ y $A\vec{x}_2 = \vec{0}$), entonces

$$A(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2) = a_1\vec{0} + a_2\vec{0} = \vec{0}.$$

Los conjontos que tienen la característica anteriormente mencionada para el conjunto de soluciones de un sistema homogeneo (que contienen cualquier combinación lineal de sus elementos) jugarán un papel muy importante en adelante.

## Definición

*Un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es llamado subespacio de $\mathbb{R}^n$ si es cerrado bajo suma y multiplicación por escalares, es decir:*

1. *Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ entonces $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$.*

Los conjontos que tienen la característica anteriormente mencionada para el conjunto de soluciones de un sistema homogeneo (que contienen cualquier combinación lineal de sus elementos) jugarán un papel muy importante en adelante.

## Definición

*Un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es llamado subespacio de $\mathbb{R}^n$ si es cerrado bajo suma y multiplicación por escalares, es decir:*

1. *Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ entonces $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$.*
2. *Si $\vec{v} \in V$ entonces $r\vec{v} \in V$ para cualquier escalar $r \in \mathbb{R}$.*

Una primera consecuencia de esta definición es que *cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ debe contener necesariamente al vector cero $\vec{0}$*: Si $\vec{v} \in V$ entonces, por la propiedad 2, $-\vec{v} \in V$ y, por la propiedad 1,

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \in V.$$

Así, una propiedad fundamental del conjunto de soluciones de un sistema homogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Si el sistema, para la misma matriz $A$, no es homogeneo (i.e. $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} \neq \vec{0}$), tenemos el siguiente resultado

## Teorema

*Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales y consideremos su sistema homogeneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$. Si $\vec{p}$ es una solución particular del sistema no homogeneo y $\vec{h}$ es una solución general del sistema homogeneo, entonces $\vec{p} + \vec{h}$ es una solución del sistema no homogeneo. Más aun, cualquier solución $\vec{x}$ al sistema no homogeneo se puede escribir como $\vec{x} = \vec{p} + \vec{h}$, donde $\vec{p}$ es una solución particular del sistema no homogeneo y $\vec{h}$ es una solución general del sistema homogeneo.*

La primera parte del teorema se sigue de las definiciones: Si $\vec{p}$ es una solución particular del sistema no homogeneo $A\vec{x} = \vec{b}$ entonces

$$A\vec{p} = \vec{b},$$

y si $\vec{h}$ es una solución general del sistema homogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$ entonces

$$A\vec{h} = \vec{0},$$

luego

$$A(\vec{p} + \vec{h}) = A(\vec{p}) + A(\vec{h}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

es decir que es una solución del sistema no homogeneo. La segunda parte se demuestra en forma similar.

## Ejemplo

*En un ejemplo anterior encontramos que la solución general del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \quad -2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

*es* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 \\ -\frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, *que podemos escribir como*

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -\frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *donde* $\begin{pmatrix} 2x_3 \\ -\frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *es una solución general del sistema homogeneo y* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es claramente una solución particular del sistema no homogeneo.*

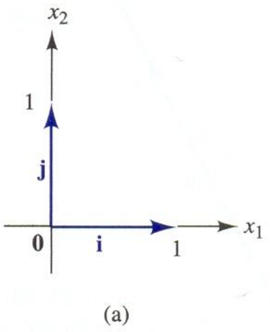
# Bases de subespacios

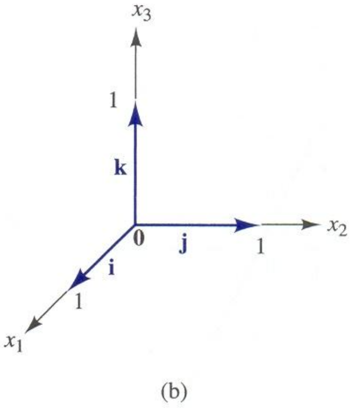
## Definición

*Sea* $V$ *un subespacio de* $\mathbb{R}^n$. *Un subconjunto* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ *de* $V$ *es llamado* **base** *del subespacio si cualquier vector* $\vec{v} \in V$ *se puede escribir en forma única como combinación lineal de* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$*, es decir si existen escalares únicos* $r_1, \ldots, r_k$ *tales que*

$$\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \cdots r_k\vec{v}_k.$$

Ejemplos de bases en el plano ($a$) y el espacio ($b$) son las bases formadas por los vectores unitarios dirigidos en cada coordenada:



## Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*

## Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*
2. *La matriz $A$ es equivalente por filas a la matriz identidad.*

## Teorema (Resumen)

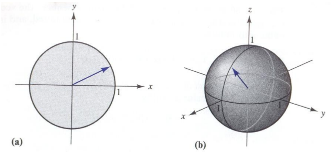
*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*
2. *La matriz $A$ es equivalente por filas a la matriz identidad.*
3. *El sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*

### Teorema (Resumen)

*Sea $A$ una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La matriz $A$ es invertible.*
2. *La matriz $A$ es equivalente por filas a la matriz identidad.*
3. *El sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*
4. *Las columnas de $A$ forman una base para $\mathbb{R}^n$.*


y
1
x
1
(a)
z
1
x
1
1
y
(b)

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos

# Contenidos