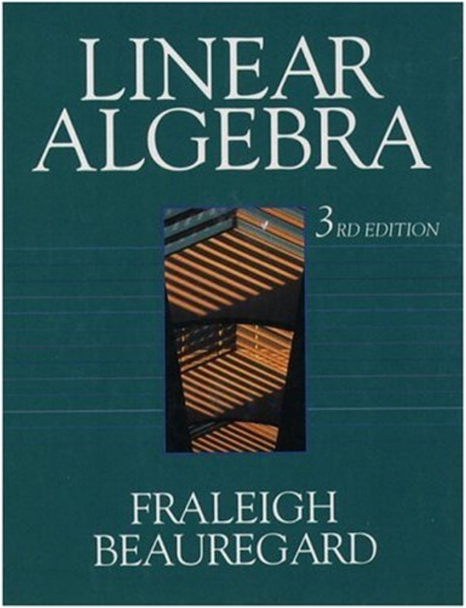
Álgebra Lineal

Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes

Primer Semestre de 2007

Texto guía:



Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

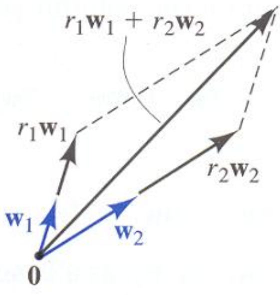
Dependencia e independencia lineal

Definición

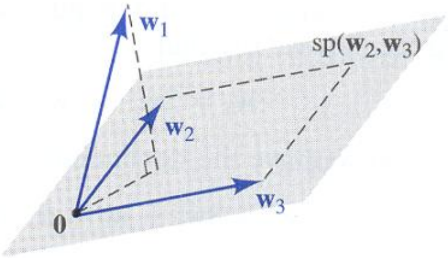
Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es llamado* *linealmente dependiente* *si existen escalares* $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$, *no todos cero, tales que*

$$r_1\vec{v}_1 + \cdots + r_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

En caso contrario (es decir, si la única combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ *que es nula es la trivial) los vectores son llamados* *linealmente independientes*.



(a)



(b)

En (a) vemos un vector en el espacio $Sp(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, espacio generado $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ en $\mathbb{R}^3$.

En (b) vemos que el vector $\vec{w}_1$ es linealmente independiente de $\vec{w}_2$ y $\vec{w}_3$, ya que no pertenece al espacio generado por ellos.

Bases

Una base para un espacio es "lo mínimo necesario para generar el conjunto"

Sea V un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ es llamado base de V si:

1. El conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo

Bases

Una base para un espacio es "lo mínimo necesario para generar el conjunto"

Sea V un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ es llamado base de V si:

1. El conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente.
2. $Sp(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = V$, es decir, cualquier vector de V puede escribirse como combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Ejemplo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

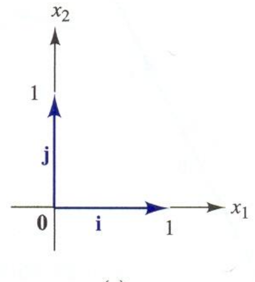
No es una base para $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

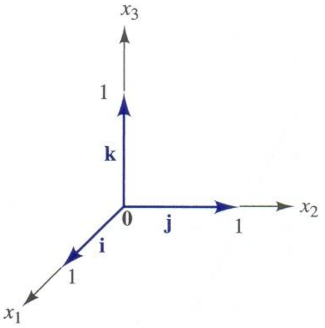
Es una base para $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^n$ hay una base canónica, la formada por los vectores unitarios

$$B_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$



(a)



(b)

En (a) la base cannica de $\mathbb{R}^2$. En (b) la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Todas las bases de un subespacio V tienen el *mismo* número de elementos. Tal número es llamado la *dimensión* del subespacio.

Por ejemplo, sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$. El conjunto W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (ya que es el conjunto solución a un sistema homogeneo), y si $\vec{v} \in W$, entonces

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W, y

$$\dim W = 2.$$

Existencia y determinación de bases

Teorema

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. *W tiene una base, y* $\dim W \leq n$.

Existencia y determinación de bases

Teorema

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. *W tiene una base, y* $\dim W \leq n$.
2. *Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta lograr una base de $\mathbb{R}^n$.*

Existencia y determinación de bases

Teorema

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. *W tiene una base, y* $\dim W \leq n$.
2. *Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta lograr una base de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Si* $\dim W = k$ *entonces*
   - i. *Cualquier conjunto de k vectores linealmente independientes forma una base para W.*
   - ii. *Cualquier conjunto de k vectores que genere a W forma una base para W.*

Rango de una matriz

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matriz $m \times n$, entonces podemos definir dos subespacios asociados a la matriz A:

1. El espacio columna de A: $C_A = Sp(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$, donde $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n \in \mathbb{R}^m$ son las columnas de A.

La dimensión de estos espacios contienen información importante sobre la matriz.

Rango de una matriz

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matriz $m \times n$, entonces podemos definir dos subespacios asociados a la matriz A:

1. El espacio columna de A: $C_A = Sp(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$, donde $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n \in \mathbb{R}^m$ son las columnas de A.
2. El espacio fila de A: $F_A = Sp(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$, donde $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m \in \mathbb{R}^n$ son las filas de A.

La dimensión de estos espacios contienen información importante sobre la matriz.

La dimensión de C_A y la de F_A son iguales!

Definición

El rango de una matriz A, denotado r_A, es la dimensión de su espacio fila (= dimensión de su espacio columna).

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, *entonces*

$$C_A = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

tiene dimensión 2 (ya que los dos vectores son linealmente independientes). Por otra parte

Ejemplo (continuación)

$$F_A = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\},$$

pero tres vectores en $\mathbb{R}^2$ *no pueden ser linealmente independientes, luego podemos eliminar uno para obtener una base de* F_A*, lo que ilustra que* $\dim C_A = \dim F_A$. *Así, en este caso,*

$$r_A = 2.$$

El rango de una matriz A puede entonces calcularse mediante reducción de Gauss-Jordan, contando el número de pivotes de la matriz cuando está en forma escalonada por filas. Otra forma de calcularlo es a través del espacio de soluciones del sistema homogeneo asociado a la matriz.

Definición

Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz. El espacio nulo de A es el espacio de soluciones del sistema homogeneo asociado

$$N_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\},$$

y la dimensión de tal espacio es llamada nulidad de A.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{23}(\mathbb{R})$, cuyo sistema homogeneo de ecuaciones asociado es

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \quad -2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo (continuación)

Haciendo operaciones elementales entre filas tenemos que $4x_2 = -3x_3$ *y* $x_1 = 2x_3$*, luego la solución general del sistema es*

$$\vec{x} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$

así que $N_A = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *y la nulidad de A es*

$$n_A = 1.$$

Ecuación de rango

Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz con rango r_A y nulidad n_A. Entonces

$$n = r_A + n_A,$$

donde n es el número de columnas de A.

En el ejemplo anterior $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz 2×3, luego

$$3 = r_A + 1,$$

es decir que el rango de A es 2, que corresponde a que solamente dos de las tres columnas son linealmente independientes.

El ejemplo anterior ilustra el siguiente resultado

Teorema

Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible si y solamente si $r_A = n$.

Demostración

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si el sistema homogeneo asociado asociado $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene como única solución la trivial, luego es espacio nulo de A es trivial

$$N_A = \{\vec{0}\},$$

luego

$$r_A + 0 = n.$$

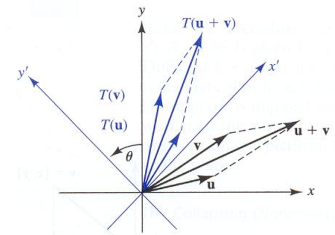
Definición

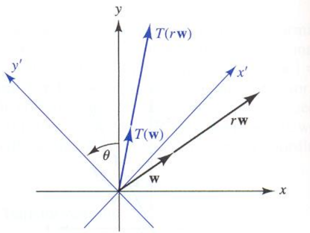
Una aplicación

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es llamada transformación lineal si preserva la estructura lineal (suma y producto por escalar):

1. *Si* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$*, entonces* $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$.
2. *Si* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces* $T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$.





Como consecuencia de esta definición es facil observar que una transformación lineal toma combinaciones lineales $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ y las lleva a transformaciones lineales de vectores en $\mathbb{R}^m$:

$$T(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1 T(\vec{x}_1) + \alpha_2 T(\vec{x}_2) + \cdots + \alpha_k T(\vec{x}_k).$$

En particular, por ejemplo, podemos probar que la imagen del cero $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ bajo una transformación lineal debe ser el cero $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$:

$$T(\vec{0}) = T(\vec{x} + (-\vec{x})) = T(\vec{x}) - T(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Ejemplo

La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x+y \\ y+z \end{array}\right),$$

es una transformación lineal.
La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} x+y+1 \\ y+z \end{array}\right),$$

no es una transformación lineal.

A cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podemos asociar una matriz $m \times n$ de la forma siguiente:

1. Tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Calculamos la imagen de cada elemento de tal base canónica, y lo ponemos como vector columna de la matriz de transformación:

$$A_T = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Tomemos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}.$$

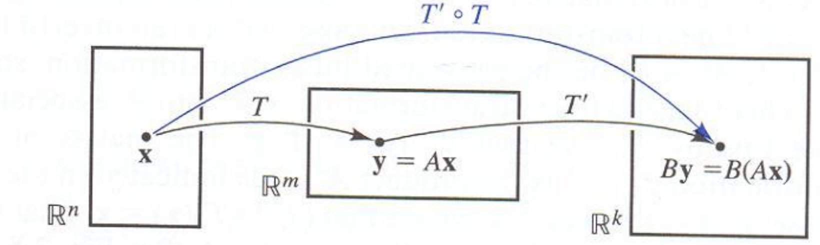
Entonces

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego la matriz de la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

También podemos componer dos transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$:



y la matriz que representa la composición $T' \circ T$ es el producto de las matrices correspondientes a T y T'.

Una transformación lineal T es invertible si su matriz de transformación es invertible, en este caso decimos que su transformación inversa T^{-1} es la determinada por la matriz inversa y entonces:

$$T^{-1} \circ T = \mathit{Identidad}.$$

Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cuatro espacios juegan un papel importante en la descripción de la transformación:

1. El dominio o espacio de salida : $dom(T) = \mathbb{R}^n$.
2. El codominio o espacio imagen $\mathbb{R}^m$.
3. El núcleo o espacio nulo de T:
$$N_T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \right\}.$$
4. La imagen o rango de T:
$$R_T = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = T(\vec{x}) \; para\; algún\; \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}.$$

Como consecuencia del teorema que relaciona el rango de una matriz con su número de columnas y la dimensión del espacio nulo, tenemos el siguiente

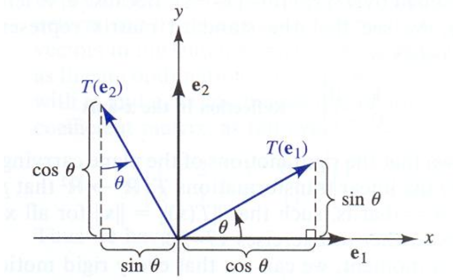
Teorema

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces:

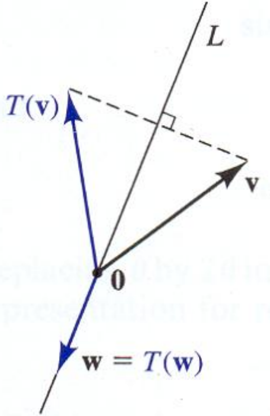
$$\dim(dom(T)) = \dim(N_T) + \dim(R_T).$$

Una rotación de un ángulo θ en el plano $\mathbb{R}^2$ es un ejemplo de transformación lineal. Para encontrar la matriz correspondiente, observamos el efecto de tal rotación en la base canónica de $\mathbb{R}^2$. La matriz correspondiente es

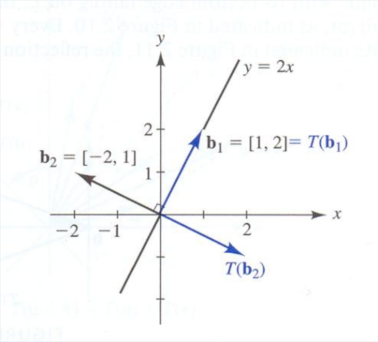
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Otro ejemplo común es una reflexión respecto a una recta L fija en el plano que pase por el origen. En este caso, para encontrar la matriz de la transformación lineal es más útil trabajar con una base del plano que contenga un vector sobre la recta de reflexión.



Ejemplo



Consideremos la reflexión respecto a la recta $y = 2x$. La reflexión deja fijo el vector $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y cambia de sentido al vector $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego podemos usar esta observación sencilla

$$T(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 \quad y \quad T(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2,$$

y la linearidad de T, para encontrar su matriz.

Ejemplo (continuación)

De hecho, dado que podemos escribir la base canónica $\left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ *del plano en términos de* $\vec{b}_1$ *y* $\vec{v}_2$*,*

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{5}\vec{b}_1 - \frac{2}{5}\vec{b}_2, \quad \vec{e}_2 = \frac{2}{5}\vec{b}_1 + \frac{1}{5}\vec{b}_2$$

Entonces

$$T(\vec{e}_1) = \frac{1}{5}T(\vec{b}_1) - \frac{2}{5}T(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = \frac{2}{5}T(\vec{b}_1) + \frac{1}{5}T(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

luego la matriz de la reflexión respecto a $y = 2x$ *es*

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos