# Parcial III – Álgebra Lineal

Abril 29 de 2009

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

(i) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son vectores ortogonales en $\mathbb{R}^3$ y $A$ es la matriz $3 \times 3$ cuyas columnas son estos tres vectores, entonces $A^{-1} = A^T$.

(ii) Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ son similares.

(iii) Si $A$ es una matriz $4 \times 4$ diagonalizable y su polinomio característico es $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$, entonces la nulidad de $A$ es 2.

(10 Puntos) **II**. Considere la recta $L = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ en el plano $\mathbb{R}^2$.

i. Encuentre el subespacio ortogonal $L^\perp$.

ii. Encuentre la matriz de la proyección ortogonal

$$\begin{array}{rcl} P_L : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \mapsto & \mathrm{Proj}_L \vec{x} \end{array}$$

sobre la recta $L$.

iii. Encuentre una base del plano $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de proyección del punto anterior sea diagonal.

iv. Encuentre la matriz de la proyección ortogonal

$$\begin{array}{rcl} P_{L^\perp} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \mapsto & \mathrm{Proj}_{L^\perp} \vec{x} \end{array}$$

sobre el subespacio $L^\perp$.

v. Demuestre que la suma de las dos matrices $P_L$ y $P_{L^\perp}$, calculadas anteriormente (en ii. y iv.), es igual a la matriz identidad. Haga una grfica que explique el resultado.

# Solución

**I**. (i) Falso. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son vectores ortogonales en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0,$$

luego la matriz $A$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

y, entonces,

$$A^T A = \begin{pmatrix} - & \vec{v}_1 & - \\ - & \vec{v}_2 & - \\ - & \vec{v}_3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}_1\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|\vec{v}_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|\vec{v}_3\|^2 \end{pmatrix},$$

luego, a menos que $\|\vec{v}_1\|^2 = \|\vec{v}_2\|^2 = \|\vec{v}_3\|^2 = 1$, la afirmación es falsa. Un sencillo contraejemplo es la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(ii) Falso. Si las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ fueran similares, su determinante debería ser el mismo. Sin embargo, $\det A = 5 \neq -5 = \det B$.

(iii) Verdadero. Si $A$ es una matriz $4 \times 4$ y su polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4) = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0,$$

entonces los valores propios de $A$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$, y $\lambda_4 = -2$. Como la matriz es diagonalizable, la multiplicidad geométrica del valor propio 0 debe ser igual a 2, es decir que hay dos vectores independientes $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ que satisfacen la ecuación de valor propio

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Entonces $A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 = \vec{0}$ y $A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$, luego el espacio nulo de $A$ es $N_A = \mathsf{Sp}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, luego la nulidad de $A$ es 2.

**II**.

i. Considere la recta $L = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Dado que la recta $L$ tiene dimensión 1 en $\mathbb{R}^2$, el complemento ortogonal $L^\perp$ de la recta es otra recta. En efecto, $L^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} \cdot \vec{l} = 0 \ \ \forall\, \vec{l} \in L\}$, es decir el espacio nulo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a - b = 0,$$

es decir que $a = b$, osea que $L^\perp = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es la recta que buscamos.

ii. Para calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre la recta $L$,

$$\begin{array}{rcl} P_L : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \mapsto & \mathrm{Proj}_L \vec{x}, \end{array}$$

dado que en la base para $L$ hay un solo vector, podemos usar la fórmula de proyección usual $\mathsf{Proj}_{\vec{y}}\vec{x} = \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\vec{y}\cdot\vec{y}}\right)\vec{y}$. Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$\mathsf{Proj}_L\vec{x} = \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

luego la matriz de proyección es $P_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nótese que el resultado es exactamente el mismo a partir de la fórmula $P_L = A(A^TA)^{-1}A^T$, con $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$P_L = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

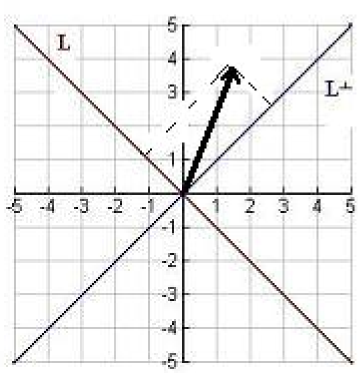
iii. Encontrar una base del plano $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de proyección del punto anterior resulta diagonal es buscar una base de vectores propios de $P_L$ para el plano. Como $P_L$ es la proyección ortogonal sobre la recta $L$, es claro que cualquier vector $\vec{l}$ que esté sobre $L$ va a satisfacer

$$P_L\vec{l} = \vec{l},$$

es decir va a ser vector propio con valor peropio igual a 1; y cualquier vector $\vec{x}$ que esté sobre $L^{\perp}$ va a satisfacer

$$P_L\vec{x} = \vec{0},$$

es decir va a ser vector propio con valor peropio igual a 0 (ver figura). Así, una base de vectores propios para $P_L$ es la formada por los vectores generadores de la recta $L$ y su complemento ortogonal: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.




Otra forma de hacerlo es diagonalizando la matriz: Como $P_L$ es simétrica es diagonalizable, $\det(P_L - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1) = 0$ es claro que los valores propios son 1 y 0, como ya sabíamos y, calculando los vectores propios obtenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (nótese que son ortogonales, ya que corresponden a valores propios distintos de una matriz simétrica), lo que da el mismo resultado.

iv. Igual que antes, la matriz de la proyección ortogonal

$$\begin{array}{rcl} P_{L^\perp} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \mapsto & \mathrm{Proj}_{L^\perp}\vec{x} \end{array}$$

sobre el subespacio $L^\perp$ se obtiene facilmente a partir de la ecuación de proyección:

$$\mathsf{Proj}_{L^\perp}\vec{x} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+\frac{y}{2} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

luego la matriz de proyección es $P_{L^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

v. Finalmente, la suma de las dos matrices $P$ y $P_{L^\perp}$ es:

$$P_L + P_{L^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y es igual a la matriz identidad ya que cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ se descompone en una suma

$$\vec{x} = \mathsf{Proj}_L\vec{x} + \mathsf{Proj}_{L^\perp}\vec{x},$$

como lo ilustra la gáfica anterior.