Parcial II – Cálculo Vectorial

Marzo 8 de 2010

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando matematicamente su respuesta.

(i) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y)^2-4}{(x+y)-2} = 4$.

(ii) El dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 - xy}$ es el conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ y } x \geq y\}.$$

(iii) Si $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

(6 Puntos) **II**. Considere la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

(i) Encuentre los puntos críticos de f.

(ii) Clasifique los puntos críticos de f en máximos, mínimos y puntos de silla. Con base en estos resultados haga una boceto de la superficie $z = f(x,y)$.

(6 Puntos) **III**. Considere las superficies S_1 dada por $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20$ y S_2 dada por $x^2 + y^2 + z = 4$.

(i) Encuentre la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto $(0,1,3)$.

(ii) Trace la curva de intersección entre S_1 y S_2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de ambas superficies en el punto $(0,1,3)$.

Solución

I.

(i) Verdadero.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y)^2-4}{(x+y)-2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{[(x+y)-2][(x+y)+2]}{(x+y)-2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} [(x+y)+2] = 4.$$

(ii) Falso. El dominio $Dom(f)$ de la función f es el conjunto

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-xy=x(x-y)\geq 0\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0 \text{ y } x\geq y\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq 0 \text{ y } x\leq y\}. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, el punto $(-2,-1)$ no está en D, pero si en el dominio de f.

(iii) Verdadero. Es fácil ver que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(e^x \operatorname{sen} y)=e^x \operatorname{sen} y$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y)=-e^x \operatorname{sen} y,$$

luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

II.

(i) Para encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$ debemos calcular sus derivadas parciales e igualarlas a cero:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x^3+4xy-2y^2+1)=-3x^2+4y=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-x^3+4xy-2y^2+1)=4x-4y=0, \tag{2}$$

la ecuación (2) implica que, en cualquier caso, $x=y$ y, usando esto en la ecuación (1), tenemos que

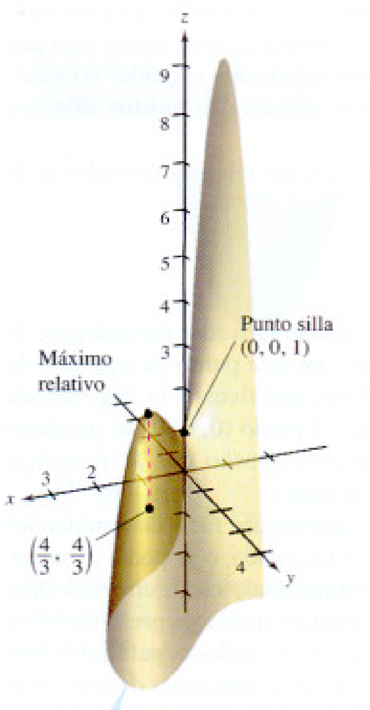
$$3x^2-4x=x(3x-4)=0,$$

lo que nos da dos puntos críticos: $x=y=0$ y $x=y=\frac{4}{3}$.

(ii) Para clasificar los puntos críticos $(0,0)$ y $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ en máximos locales, mínimos locales y puntos de silla, debemos usar el test de las segundas derivadas. En este caso la matriz de segundas derivadas es

$$D=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $24x-16$. Así, para el punto $(0,0)$ el detreminante es $\det D\mid_{(0,0)}=-16<0$, luego tal punto es un *punto de silla*. Por otra parte, $\det D\mid_{(\frac{4}{3},\frac{4}{3})}=16>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mid_{(\frac{4}{3},\frac{4}{3})}=-8<0$, luego tal punto es un *máximo local*. Así las cosas, la gráfica de la función debe ser algo así como lo que muestra la figura.



III. El punto $(0,1,3)$ pertenece tanto a S_1 como a S_2, ya que satisface las ecuaciones correspondientes: $x^2+2y^2+2z^2=20$ y $x^2+y^2+z=4$.

(i) La ecuación del plano tangente, en un punto $P=(x_o,y_o,z_o)$, a una superficie dada por una ecuación de la forma $F(x,y,z)=c$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mid_P (x-x_o)+\frac{\partial F}{\partial y}\mid_P (y-y_o)+\frac{\partial F}{\partial z}\mid_P (z-z_o)=0. \tag{3}$$

Para la superficie S_1 la función en cuestión es $F(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2$, luego la ecuación del plano es

$$(2x)\mid_{(0,1,3)}(x-0)+(4y)\mid_{(0,1,3)}(y-1)+(4z)\mid_{(0,1,3)}(z-3)=0,$$

es decir

$$y+3z=10.$$

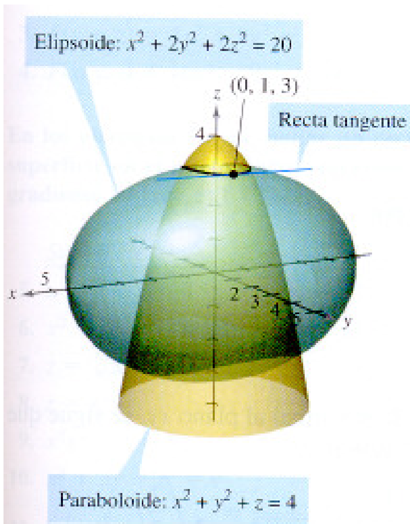
De la misma forma, para la superficie S_2 la función en cuestión es $G(x,y,z)=x^2+y^2+z$, luego la ecuación del plano es

$$(2x)\mid_{(0,1,3)}(x-0)+(2y)\mid_{(0,1,3)}(y-1)+(1)\mid_{(0,1,3)}(z-3)=0,$$

es decir

$$2y+z=5.$$

(ii) Para trazar la curva de intersección entre S_1 y S_2 no es necesario conocer la curva misma, solo basta observar la forma de las superficies:



La recta *tangente* a la curva de intersección entre *ambas* superficies debe estar tanto en el plano tangente a S_1 como en el plano tangente a S_2 en tal punto. Podemos entonces resolver el problema (sin tener que escribir explicitamente la curva de intersección) usando simultaneamente las dos ecuaciones encontradas en la parte (i) para los planos tangentes, encontrando un vector director de la recta tangente a la curva a partir de los vectores normales a los planos tangentes.

El vector normal al plano S_1 es

$$\vec{n}_1 = \vec{\nabla} F \mid_{(0,1,3)} = \langle 0, 4, 12 \rangle$$

y, de igual forma, vector normal al plano S_1 es

$$\vec{n}_2 = \vec{\nabla} G \mid_{(0,1,3)} = \langle 0, 2, 1 \rangle,$$

entonces el vector $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \langle -20, 0, 0 \rangle$ es perpendicular a mabos planos y, en consecuencia, debe ser paralelo a la recta en la que ambos se intersectan, que es la recta tangente a la curva en la que ambas superficies se intersectan. Entonces, la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva de intersección de ambas superficies en el punto $(0, 1, 3)$ esta dada por

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 0, 1, 3 \rangle + t \langle -20, 0, 0 \rangle$$

para $t \in \mathbb{R}$ o, en forma equivalente,

$$x = -20t, \quad y = 1, \quad z = 3.$$

Obsérvese que resolviendo simultaneamente las dos ecuaciones obtenidas para los planos tangentes ($y + 3z = 10$ y $2y + z = 5$) se obtiene exactamente el mismo resultado: $y = 1$, $z = 3$ y x puede ser arbitrario.