

CURVAS ALGEBRAICAS Y EL TEOREMA DE
RIEMANN-ROCH (**VERSIÓN
PRELIMINAR SIN EDITAR**)

J. D. VÉLEZ
CURSILLO CONGRESO DE MATEMÁTICAS, CALI

AGOSTO 3-6 2009

Índice general

Introducción	v
1. Conceptos básicos	1
1.1. Superficies de Riemann (ejemplos)	1
1.1.1. Acciones de grupos	10
1.1.2. Superficies cocientes bajo la acción de un grupo	13
1.1.3. Funciones holomorfas en \mathbb{C}^2 y teorema de la función inversa	15
2. Curvas algebraicas	19
2.1. Preliminares de topología algebraica	19
2.2. Superficie de Riemann asociada a curva algebraica	21
2.2.1. Propiedades básicas de los morfismos entre superficies de Riemann	23
2.2.2. Preliminares algebraicos	27
3. Sheaves	41
4. Cohomología de sheaves	53
4.1. Preliminares	53
4.1.1. δ -Funtores	56
4.2. Cohomología de Čech	57
4.2.1. El δ -functor $H = \{H^n(X, -)\}_{n \geq 0}$	61
4.2.2. Cálculo de la cohomología	68
5. Teorema de Riemann-Roch	69
5.1. Formas diferenciales	69
5.1.1. Derivada exterior de una forma	70
5.2. Divisores	74
5.3. Teorema de Riemann-Roch	76

Introducción

El propósito de estas notas es recopiar en una pocas páginas el material básico para un primer curso de superficies de Riemann. El objetivo principal es demostrar el Teorema de Riemann-Roch y dar algunas aplicaciones.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En esta sección definiremos los objetos de estudio, las superficies de Riemann, y estudiaremos sus propiedades más básicas.

1.1. Superficies de Riemann (ejemplos)

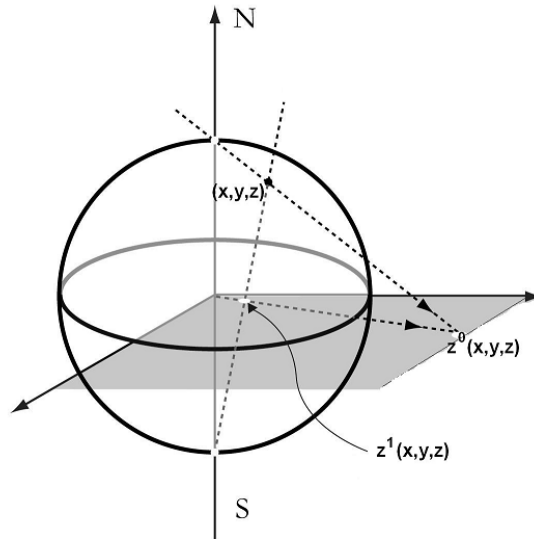
Definición 1.1.1 Una superficie de Riemann X es un espacio Hausdorff, conexo segundo contable dotado de una estructura holomorfa, lo cual significa que para cada punto $p \in X$ existe un abierto U_α y un homeomorfismo a un abierto del plano $z^\alpha : U_\alpha \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ tal que si z^α, z^β son dos de estos homeomorfismos se cumple que la función de cambio de coordenadas $z^\alpha \circ (z^\beta)^{-1}$ es una función holomorfa en su dominio. A cada (U_α, z^α) se le llama un sistema de coordenadas locales alrededor del punto p o una carta alrededor de p . Al conjunto de todas las cartas $A = \{(U_\alpha, z^\alpha)\}_{\alpha \in A}$ se le denomina un atlas para X .

Observación 1.1.2 Si se compone cada z^α con una traslación adecuada, cada carta puede tomarse de tal forma que $z^\alpha(p) = 0$. Más aún, puede suponerse que $V = D$, el disco abierto unitario, ya que para ello basta reemplazar a (U_α, z^α) por la carta (U'_α, z^α) donde $U'_\alpha = (z^\alpha)^{-1}(D)$.

Ejemplo 1.1.3 Todo abierto U del plano es una superficie de Riemann con la carta trivial (U, z) donde z es la función identidad.

Ejemplo 1.1.4 Sea $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, la esfera 2

dimensional, con la topología que hereda de \mathbb{R}^3



Proyeccion estereografica

y sean $p_N = (0, 0, 1)$ y $p_S = (0, 0, -1)$ los puntos *norte* y *sur*. Definamos $z^0 : S^2 - \{p_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección estereográfica desde el norte, de la siguiente manera: tracemos una recta l desde el punto p_N a \mathbb{C} , la cual corta la esfera en un unico punto (x, y, z) . Parametrizando a l se obtiene la ecuación:

$$l(t) = (0, 0, 1) + t((x, y, z) - (0, 0, 1)) = (tx, ty, 1 + t - tz), \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Queremos computar la interseccion de l con \mathbb{C} , lo que equivale a encontrar t tal que $(tx, ty, 1 + t - tz) = (u, v, 0)$. Despejando el parametro t se obtiene $t = 1/(1 - z)$. Por tanto

$$z^0(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right) = \frac{x + iy}{1 - z}$$

Similarmente, si tomamos la proyeccion estereografica desde el sur, seguida de la operación conjugación, se obtiene una función $z^1 : S^2 - \{p_S\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida como

$$z^1(x, y, z) = (x/(1 - z), -y/(1 - z)) = (x - iy)/(1 - z)$$

Afirmación:

- 1) $S^2 = U_0 \cup U_1$, donde $U_0 = S^2 - \{p_N\}$ y $U_1 = S^2 - \{p_S\}$
- 2) $z^0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ y $z^1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ son homeomorfismos.
- 3) La función de cambio de coordenadas, $z^1 \circ (z^0)^{-1}$, viene dada por $z^1 \circ (z^0)^{-1}(z) = 1/z$, $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Para verificar (3) computemos primero a $z^0 : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{p_N\}$, como sigue: tracemos de nuevo una recta de \mathbb{C} a p_N y parametricemos dicha recta de la siguiente manera:

$$\rho(t) = (0, 0, 1) + t((x, y, 0) - (0, 0, 1)) = (tx, ty, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dado que la recta corta la esfera en un único punto (x, y, z) se tiene que $(tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 = 1$. Despejando t obtenemos que $t = 2/(x^2 + y^2 + 1)$, y reemplazando t en $\rho(t)$, se tiene que

$$(z^0)^{-1}(x, y) = (2x/(x^2 + y^2 + 1), 2y/(x^2 + y^2 + 1), (x^2 + y^2 - 1)/(x^2 + y^2 + 1)).$$

Si hacemos $z = x + iy$ la expresión anterior se puede cambiar por:

$$(z^0)^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Un cómputo sencillo muestra que

$$(z^0 \circ (z^1)^{-1})(z) = (z^1 \circ (z^0)^{-1})(z) = 1/z, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Definamos ahora la noción de función holomorfa en una superficie de Riemann.

Definición 1.1.5 Sea X una superficie de Riemann y $f : W \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un abierto de W de X . Entonces f se llama holomorfa en W si para cada punto $p \in W$ existen coordenadas alrededor de p , $z^\alpha : U_\alpha \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ tales que $f \circ (z^\alpha)^{-1} : z^\alpha(W \cap U_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa.

Observación 1.1.6 Esta definición no depende de las coordenadas (U_α, z^α) escogidas, ya que si (U_β, z^β) es otra escogencia de coordenadas se tiene que

$$f \circ (z^\beta)^{-1} = f \circ (z^\alpha)^{-1} \circ z^\alpha \circ (z^\beta)^{-1}$$

y $z^\alpha \circ (z^\beta)^{-1}$ es holomorfa en $z^\beta(W \cap U_\alpha \cap U_\beta)$. De aquí que $f \circ (z^\beta)^{-1}$ también sea holomorfa.

Proposición 1.1.7 Si $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa entonces f es constante.

Prueba. Como f es holomorfa se cumple que $f \circ (z^0)^{-1}$ es holomorfa en \mathbb{C} . Por otro lado, $p_N = (0, 0, 1) \in U_1$, y como f también es holomorfa en U_1 , se tiene que $f \circ (z^1)^{-1}$ es holomorfa en \mathbb{C} . Además,

$$(f \circ (z^1)^{-1})(z) = (f \circ (z^0)^{-1} \circ z^0 \circ (z^1)^{-1})(z) = (f \circ (z^0)^{-1})(1/z). \quad (1.1)$$

Como $f \circ (z^0)^{-1}$ es analítica, en cualquier entorno del cero tiene un desarrollo en series de potencia:

$$f \circ (z^0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

con radio de convergencia ∞ . De 1.1 se sigue que $(z^0)^{-1}(1/z)$ también es analítica alrededor del origen. Pero

$$(f \circ (z^0)^{-1})(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

lo cual fuerza a que $a_n = 0$ si $n > 0$ (si alguno de los coeficientes a_n fuera distinto de 0, para $n > 0$, entonces el origen sería o bien un polo de esta función o una singularidad esencial. Como ninguno de estos dos casos ocurre, ya que $f \circ (z^0)^{-1}$ es analítica, se sigue que $a_n = 0, \forall n > 0$) y por tanto f es constante. ■

Definición 1.1.8 Sea X una superficie de Riemann. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se llama meromorfa si existe un conjunto cerrado A de puntos aislados de X (es decir, para cada $p_i \in A$ existe $r_i > 0$ tal que $D(p_i, r_i) \cap A = \{p_i\}$) tal que:

i) $f : (X - A) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

ii) Cada $p_i \in A$ es un polo de f , es decir, f es holomorfa en cada disco perforado (sin su centro) $D^*(p_i, r_i)$ y $\lim_{p \rightarrow p_i} |f(p)| = \infty$.

Proposición 1.1.9 Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa con un único polo en p_N , es decir, $A = \{p_N\}$. Entonces $f \circ (z^0)^{-1}$ es un polinomio, y por tanto para todo $p \neq p_N$ se tiene que $f(p) = a_0 + a_1 z^0(p) + \dots + a_n z^0(p)^n$, con $a_k \in \mathbb{C}$.

Prueba. Como $f \circ (z^0)^{-1}$ es holomorfa en \mathbb{C} se tiene que $f \circ (z^0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con radio de convergencia infinito. Ahora, $p_N = (0, 0, 1)$ es un polo de f si y solo si 0 es un polo de $f \circ (z^1)^{-1}$ (recordemos que $z^1(p_N) = 0$). Así, que

$$(f \circ (z^1)^{-1})(z) = (f \circ (z^0)^{-1}) \circ (z^0 \circ (z^1)^{-1})(z) = (f \circ (z^0)^{-1})(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \quad (1.2)$$

Como 0 es un polo de esta función, esta última suma es finita y por tanto la sumatoria 1.2 es finita de lo cual se sigue que $(f \circ (z^0)^{-1})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es un polinomio, o en forma equivalente, que $f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^0(p))^n$, para todo $p \neq p_N$. ■

Proposición 1.1.10 *Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y denotemos por A al conjunto de sus polos. Entonces $f \circ (z^0)^{-1}$ y $f \circ (z^1)^{-1}$ son funciones racionales.*

Prueba. Notemos primero que el conjunto A tiene que ser finito, pues en caso contrario f tendría un punto de acumulación que estaría en A (por definición A es un conjunto cerrado), y este punto no sería aislado. Sea $A = \{p_1, \dots, p_n\}$, el conjunto de polos de f que estén en U_0 y denotemos por $a_1 = z^0(p_1), a_2 = z^0(p_2), \dots, a_r = z^0(p_r)$, a las imágenes de los p_i en \mathbb{C} . Claramente cada a_i es un polo de $f \circ (z^0)^{-1}$. Si n_i es el orden del polo a_i se tiene que $(z - a_i)^{n_i} (f \circ (z^0)^{-1})$ es holomorfa alrededor de a_i . Vemos entonces que $Q(z)(f \circ (z^0)^{-1})$, donde $Q(z) = (z - a_1)^{n_1} \dots (z - a_r)^{n_r}$ es holomorfa en \mathbb{C} . Luego $(Q \circ z^0)f$ es holomorfa en $S^2 - \{p_N\}$. Ahora, el punto p_N puede ser un polo de f , o en caso contrario, un punto alrededor del cual f es acotada. En cualquiera de estos dos casos, de la proposición anterior se sigue que $Q(z)(f \circ (z^0)^{-1})(z) = P(z)$, donde $P(z)$ es un polinomio (que es constante si p_N no es un polo). Así que

$$(f \circ (z^0)^{-1})(z) = P(z)/Q(z)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f \circ (z^1)^{-1} &= (f \circ (z^0)^{-1}) \circ (z^0 \circ (z^1)^{-1}) \\ &= P(1/z)/Q(1/z) \end{aligned}$$

que obviamente también es una función racional. ■

Definición 1.1.11 Si X y Y son superficies de Riemann, un morfismo o función holomorfa entre X y Y es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que para cada $p \in X$ y $f(p) \in Y$ existen coordenadas locales (U_p, z) y $(V_{f(p)}, w)$ tales que $f(U_p) \subset V_{f(p)}$ y $w \circ f \circ z^{-1}$ es holomorfa en U_p .

Veamos que definir una función meromorfa en X es equivalente a definir un morfismo a S^2 .

Proposición 1.1.12 *Sea X una superficie de Riemann, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y denotemos por A al conjunto de polos de f . Definamos*

$F : X \rightarrow S^2$ como $F(p) = ((z^0)^{-1} \circ f)(p)$, si p no es polo de f y como $F(a) = p_N$, si $a \in A$, donde $(z^0, U_0), (z^1, U_1)$ son las cartas de S^2 del ejemplo 1.1.3 y p_N y p_S los polos norte y sur. Entonces F es un morfismo entre X y S^2 . Recíprocamente, si F es una función holomorfa a S^2 y definimos $A = \{p \in X : F(p) = p_N\}$ y a $f(p) = (z^0 \circ F)(p)$, si $p \notin A$, entonces f es meromorfa en X con polos en A .

Prueba. Queremos ver que si $p \in X$ existen entornos abiertos $U_p \subset X$, $V_{F(p)} \subset S^2$ y coordenadas locales $(U_p, \psi), (V_{F(p)}, z^i)$, $(i = 0, 1)$ tales que $F(U_p) \subset V_{F(p)}$, con $\psi(p) = 0$, $z^i(p) = 0$ y donde $\tilde{U}_0 = \psi(U_p)$, $V_0 = z^i(V_{F(p)})$ son entornos del cero en \mathbb{C} , tales que $z^i \circ F \circ \psi^{-1}$ sea una función holomorfa

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{F} & V_{F(p)} \\ \psi \downarrow & & \downarrow z^i \\ \tilde{U}_0 & \xrightarrow{z^i \circ F \circ \psi^{-1}} & V_0 \end{array}$$

Consideremos dos casos:

i) $p \notin A$, en este caso $F(p) = (z^0)^{-1}(f(p)) \in U_0$ y podemos tomar (U_p, ψ) coordenadas locales tales que $A \cap U_p = \emptyset$ (esto es posible ya que A es cerrado y $p \notin A$) y tal que $\psi(p) = 0$. Tomemos $\psi(U_p) = \tilde{U}_0$ y $V_{F(p)} = U_0$, con coordenadas locales $z^0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$. Ahora

$$z^0 \circ F \circ \psi^{-1} = f \circ \psi^{-1}$$

y esta función es holomorfa, pues f lo es.

ii) $p = a \in A$. Como $Z = f^{-1}(0) \subset X$ es un cerrado (f es continua) y los puntos de A son aislados podemos encontrar un entorno abierto U_a del punto $a \in X$ tal que $U_a \cap A = \{a\}$ y $U_a \cap Z = \emptyset$. Esta última condición garantiza que $F(q) \in U_1, \forall q \in U_a$, ya que si $q \neq a$, $F(q) = (z^0)^{-1}(f(q)) \neq p_S$ (si $(z^0)^{-1}(f(p)) = p_S$ se tendría que $f(p) = z^0(p_S) = 0$, lo cual es absurdo) y si $p = a$ se tiene que $F(a) = p_N \in U_1$, y en consecuencia $F(U_a) \subset U_1$. Sea $\psi : U_a \rightarrow \tilde{U}_0$, con $\psi(a) = 0$, coordenadas locales en U_a . Queremos ver que $h = z^1 \circ F \circ \psi^{-1}$ es holomorfa en \tilde{U}_0 .

$$\begin{array}{ccc} U_a & \xrightarrow{F} & U_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow z^1 \\ \tilde{U}_0 & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \end{array}$$

Pero claramente

$$h(z) = \begin{cases} z^1 \circ (z^0)^{-1} \circ f \circ \psi^{-1}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{f \circ \psi^{-1}}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Como

$$\lim_{z \rightarrow 0} |h(z)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{f \circ \psi^{-1}(z)} \right| = 0$$

vemos que h tiene una singularidad removible en $z = 0$, y como $h(0) = 0$, vemos que h es holomorfa en \tilde{U}_0 .

El recíproco se deja como ejercicio para el lector. ■

Corolario 1.1.13 *De la proposición anterior se sigue que todo morfismo de S^2 en S^2 esta dado por una funcion racional. En forma precisa, si $F : S^2 \rightarrow S^2$ es un morfismo entonces*

$$F(p) = \begin{cases} (z^0)^{-1} (P(z^0(p))/Q(z^0(p))), & \text{si } Q(z^0(p)) \neq 0 \\ p_N, & \text{si } Q(z^0(p)) = 0 \end{cases}$$

Una transformacion de Moebius es una funcion de la forma $\frac{az + b}{cz + d}$ con

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ejercicio 1.1.14 *Sea $T = \frac{az + b}{cz + d}$ una transformacion de Moebius. Entonces*

T define una funcion de S^2 en S^2 de la siguiente manera:

$$\tau(p) = \begin{cases} (z^0)^{-1} \circ T \circ z^0, & \text{si } c = 0 \wedge p \neq p_N \\ p_N, & \text{si } c = 0 \wedge p = p_N \\ (z^0)^{-1} \circ T \circ z^0, & \text{si } c \neq 0 \wedge z^0(p) \neq -d/c \wedge p \neq p_N \\ p_N, & \text{si } c \neq 0 \wedge z^0(p) = -d/c \wedge p \neq p_N \\ (z^0)^{-1}(a/c), & \text{si } c \neq 0 \wedge p = p_N \end{cases}$$

Demuestre que

- 1) τ es un biholomorfismo
- 2) Todo biholomorfismo de S^2 esta dado por una transformacion T de Moebius.

Veamos algunos ejemplos de superficies de Riemann.

Ejemplo 1.1.15 La Línea Proyectiva Compleja es una superficie de Riemann. En $(\mathbb{C}^2)^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ definimos la relación de equivalencia $(z_0, z_1) \sim (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$ si existe $\lambda \neq 0$ en \mathbb{C} tal que $\tilde{z}_0 = \lambda z_0$ y $\tilde{z}_1 = \lambda z_1$. A la clase de equivalencia de (z_0, z_1) se le denotará por $[z_0, z_1]$. Consideremos la función natural

$$\pi : \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^*/\sim = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

definida como $\pi(z_0, z_1) = [z_0, z_1]$, donde

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \{[z_0, z_1] : z_0 \neq 0, z_1 \neq 0\}.$$

Definimos una topología en $P_{\mathbb{C}}^1$ declarando $V \subset P_{\mathbb{C}}^1$ abierto si y solo si $\pi^{-1}(V) \subset (\mathbb{C}^2)^*$ es abierto. Con esta topología se verifica fácilmente que:

- i) π es continua
- ii) $P_{\mathbb{C}}^1$ es un espacio Hausdorff, segundo contable.

Por otro lado, consideremos las cartas $\psi_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ donde

$$\tilde{U}_0 = \{[z_0, z_1] : z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \quad \tilde{U}_1 = \{[z_0, z_1] : z_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

y estas funciones están definidas como $\psi_0([z_0, z_1]) = z_1/z_0$ y $\psi_1([z_0, z_1]) = z_0/z_1$. Es fácil ver que \tilde{U}_0 y \tilde{U}_1 son abiertos y que ψ_0 y ψ_1 son homeomorfismos con inversas

$$\psi_0^{-1}(z) = [1, z], \quad \psi_1^{-1}(z) = [z, 1],$$

respectivamente. sus funciones de transición son

$$(\psi_0^{-1} \circ \psi_1)(z) = 1/z \text{ y } (\psi_1 \circ \psi_0^{-1})(z) = 1/z.$$

Por tanto $P_{\mathbb{C}}^1$ es una superficie de Riemann.

Proposición 1.1.16 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es isomorfa como superficie de Riemann a S^2 .

Prueba. Definamos una función $h : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow S^2$ de la siguiente manera:

$$h([a_0, a_1]) = \begin{cases} (z^0)^{-1}(a_1/a_0), & \text{si } [a_0, a_1] \in \tilde{U}_0 \\ (z^1)^{-1}(a_0/a_1), & \text{si } [a_0, a_1] \in \tilde{U}_1 \end{cases}$$

donde $(z^0, U_0), (z^1, U_1)$ son las cartas estándar de S^2 .

1) h está bien definida. Si $[a_0, a_1] \in \tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1$, entonces

$$(z^0)^{-1}(a_1/a_0) = (z^1)^{-1}(a_0/a_1) \iff (z^1 \circ (z^0)^{-1})(a_1/a_0) = a_0/a_1$$

lo cual es cierto ya que $(z^1 \circ (z^0)^{-1})(w) = 1/w$.

2) h es holomorfa. Sea $p = [a_0, a_1] \in \tilde{U}_0$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_0 & \xrightarrow{h} & U_0 \\ \psi_0 \downarrow & & \downarrow z^0 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{z^0 \circ h \circ \psi_0^{-1}} & \mathbb{C} \end{array}$$

entonces

$$(z^0 \circ h \circ \psi_0^{-1})(z) = (z^0 \circ h)([1, z]) = z/1 = z.$$

Similamente si $p = [a_0, a_1] \in \tilde{U}_1$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_1 & \xrightarrow{h} & U_1 \\ \psi_1 \downarrow & & \downarrow z^1 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{z^1 \circ h \circ \psi_1^{-1}} & \mathbb{C} \end{array}$$

$$(z^1 \circ h \circ \psi_1^{-1})(z) = (z^1 \circ h)([z, 1]) = z/1 = z.$$

3)

Veamos que h tiene una inversa y es holomorfa. Sea $g : S^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ definida como

$$g(p) = \begin{cases} [1, z^0(p)], & \text{si } p \in U_0 \\ [z^1(p), 1], & \text{si } p \in U_1 \end{cases}$$

g esta bien definida . Si $p \in U_0 \cap U_1$ entonces $[1, z^0(p)] = [z^1(p), 1]$ si y sólo si existe un $\lambda \neq 0$ en \mathbb{C} tal que

$$\lambda[1, z^0(p)] = [z^1(p), 1] \iff \lambda = z^1(p)$$

$$\lambda z^0(p) = 1 \iff z^1(p) z^0(p) = 1 \iff z^1(p) = 1/z^0(p)$$

lo cual es cierto $\forall p \in U_0 \cap U_1$. Se verifica facilmente que $g = h^{-1}$ y que es holomorfa. ■

Ejemplo 1.1.17 (El toro). Sean ω_1 y ω_2 números complejos linealmente independientes sobre \mathbb{R} y sea

$$\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

una retícula (o latiz). Definamos en \mathbb{C} la siguiente relación de equivalencia: $z \sim w \iff z - w \in \Lambda$. El espacio cociente por esta relacion se denomina el *Toro definido por la latiz* Λ , y se denotará por \mathbb{C}/Λ . En \mathbb{C}/Λ definimos la topología cociente como la topología más pequeña que hace continua la

proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, es decir $\bar{U} \subset \mathbb{C}/\Lambda$ es abierto sii $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C} . Es fácil ver que con esta topología \mathbb{C}/Λ es un espacio topológico Hausdorff segundo contable. Por otro lado, se puede demostrar con facilidad que existe $\delta > 0$ tal que $|n\omega_1 + m\omega_2| \geq \delta$ para todo par de enteros m y n distintos de cero. Por tanto, si $a \in \mathbb{C}$ la restricción de π al disco abierto

$$U_a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \delta/2\}$$

en \mathbb{C} es un homeomorfismo al subconjunto abierto $\pi(U_a)$ de \mathbb{C}/Λ . Además, si $\pi(U_a) \cap \pi(U_b) \neq \emptyset$ entonces hay un único $n\omega_1 + m\omega_2 \in \Lambda$ tal que $|n\omega_1 + m\omega_2 + a - b| < \delta/2$ y por consiguiente

$$(\pi|_{U_b})^{-1} \circ \pi|_{U_a \cap \pi^{-1}(\pi(U_b))} : U_a \cap \pi^{-1}(\pi(U_b)) \longrightarrow U_b$$

esta dado por la translación de $n\omega_1 + m\omega_2$. De aquí que la colección de todas las cartas $\phi_a = (\pi|_{U_a})^{-1} : \pi(U_a) \rightarrow U_a$, para $a \in \mathbb{C}$ formen un atlas holomorfo para \mathbb{C}/Λ .

1.1.1. Acciones de grupos

Recordemos que una acción de un grupo G en un conjunto X es una función $\mu : G \times X \rightarrow X$ definida por $\mu(g, x) = g \cdot x$ la cual satisface las siguientes propiedades:

1. $1 \cdot x = x$
2. $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$

Si X es una superficie de Riemann y $G \subset \text{Aut}(X, X)$ un subgrupo del grupo de isomorfismos de X en X , G actúa sobre X en forma natural como

$$g \cdot x = g(x), \quad \forall x \in X$$

Observación 1.1.18 Dar una acción de G sobre X es equivalente a dar un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow B(X)$ donde $B(X) = \{\varphi : X \rightarrow X : \varphi \text{ es biyectiva}\}$ es el conjunto de las biyecciones de X en X , con la operación de composición de funciones. Esto ya que si $\mu : G \times X \rightarrow X$ es una acción dada, definimos $\rho(g) = \varphi_g$, donde $\varphi_g : X \rightarrow X$ es la biyección definida como $\varphi_g(x) = g \cdot x$ (su inversa es $\varphi_{g^{-1}}$). Recíprocamente, si ρ está dada, μ se define como $\mu(g, x) = \rho(g)x$.

Recordemos además que G define una relación de equivalencia en X dada por $x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G$ tal que $g \cdot x_1 = x_2$. A la clase de x se le denotará por \bar{x} .

Definición 1.1.19 Una acción de un subgrupo $G \subset \text{Aut}(X, X)$ se llama buena si para cada punto $x \in X$ existe un entorno abierto U_x tal que

$$g \cdot U_x \cap h \cdot U_x = \emptyset,$$

si $g \neq h$, donde $g \cdot W$ denota el conjunto $\{g \cdot x : x \in W\}$. Y se llama muy buena si para cada punto $x, y \in X$ tales que $y \notin \text{Orbita}_G(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$ existen entornos abiertos U_x, U_y de x y y , respectivamente, tales que

$$g \cdot U_x \cap h \cdot U_y = \emptyset, \quad \forall g, h \in G$$

Ejemplo 1.1.20 Sea $X = \mathbb{C}$. Como se demuestra en un curso básico de variable compleja, los isomorfismos de \mathbb{C} son las funciones lineales:

$$\text{Aut}(X) = \{\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \varphi(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Tomemos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ no nulos y linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Sea

$$G = \{g_{(m,n)} : m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Aut}(X)$$

el subgrupo de translaciones enteras a lo largo de w_1 y w_2 . Es decir, cada par (m, n) define el automorfismo $g_{(m,n)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\begin{aligned} g_{(m,n)}(z) &= z + (mw_1 + nw_2) \\ &= (\alpha_1 + m)w_1 + (\alpha_2 + n)w_2, \end{aligned}$$

donde $z = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Veamos que:

1. G es una acción buena. Si $z = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, definamos

$$U_z = \{z_1 : z_1 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \text{ con } \max\{|\alpha_1 - \beta_1|, |\alpha_2 - \beta_2|\} < 1/2\}.$$

y veamos que $g_{(m,n)} \cdot U_z \cap U_z = \emptyset$. Basta demostrar lo anterior para garantizar que la acción es buena, pues si $z' \in g \cdot U_z \cap h \cdot U_z$ se tendría que $z' = g \cdot x$ y $z' = h \cdot y$, para $x, y \in U_z$. Entonces $y = h^{-1} \cdot z' = (h^{-1}g) \cdot x$ lo cual implicaría que $y \in U_z \cap (h^{-1}g) \cdot U_z = \emptyset$, absurdo. Pero si $z_1 \in U_z$ y $g_{(m,n)} \cdot z_1 \in U_z$, se tendría que

$$(\beta_1 + m)w_1 + (\beta_2 + n)w_2 \in U_z$$

lo cual equivale a afirmar que

$$\max\{|\alpha_1 - (\beta_1 + m)|, |\alpha_2 - (\beta_2 + n)|\} < 1/2.$$

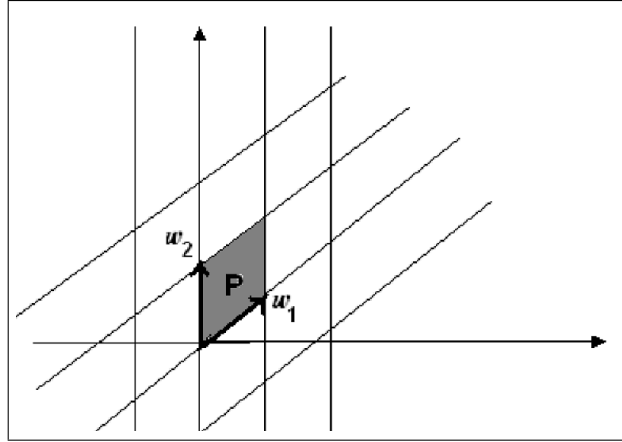
Si $m \neq 0$ se tiene que

$$1/2 > |(\alpha_1 - \beta_1) - m| > |\alpha_1 - \beta_1| - m > 1/2$$

pues $m \in \mathbb{Z}$, absurdo. Se argumenta en forma similar si $n \neq 0$.

2. G define una muy buena acción. Para demostrarlo, notemos primero que si $z \in \mathbb{C}$ existe un único punto z^* en la misma órbita de z que pertenece al *dominio fundamental*

$$P = \{w \in \mathbb{C} : w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, 0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1\}.$$



Latiz

Esto ya que si $z = a_1 w_1 + a_2 w_2$, $m =$ mayor entero menor e igual que a_1 , $n =$ mayor entero menor e igual que a_2 y $z^* = (a_1 - m)w_1 + (a_2 - n)w_2$, entonces es inmediato que $z^* \in P$ y que $g_{(m,n)} \cdot z^* = z$.

Sean z_1 y z_2 tales que $z_2 \notin \text{Orbita}_G(z_1)$ dos elementos en clases de equivalencia diferentes bajo la acción de G y escojamos entornos U_{z_1} y U_{z_2} tales que $U_{z_1}^* = \{z^* : z \in U_{z_1}\}$ y $U_{z_2}^* = \{z^* : z \in U_{z_2}\}$ tengan intersección vacía. Entonces

$$g_{(m,n)} \cdot U_{z_1} \cap g_{(l,k)} \cdot U_{z_2} = \emptyset, \forall g_{(m,n)}, g_{(l,k)},$$

ya que si $z \in g_{(m,n)} \cdot U_{z_1} \cap g_{(l,k)} \cdot U_{z_2}$ se tendría que $z = g_{(m,n)} \cdot v_1$ y $z = g_{(l,k)} \cdot v_2$, donde $v_1 \in U_{z_1}$ y $v_2 \in U_{z_2}$ y por tanto $g_{(l,k)}^{-1} g_{(m,n)} \cdot v_1 = v_2$ lo cual implicaría que $v_1^* = v_2^*$ y en consecuencia $U_{z_1}^* \cap U_{z_2}^* \neq \emptyset$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Veamos entonces que en efecto es posible escoger U_{z_1} y U_{z_2} con $U_{z_1}^* \cap U_{z_2}^* = \emptyset$. Distingamos varios casos:

- i) Caso: si $z_1^*, z_2^* \in \text{Interior}(P)$ se ve inmediatamente que $U_{z_1}^*$ y $U_{z_2}^*$ existen.

ii) Caso: si $z_1^* = aw_1$, con $0 \leq a \leq 1$ y $z_2^* \in \text{Interior}(P)$, basta tomar entornos de z_1^* , $z_1^* + w_2$ y z_2^* que sean disjuntos. Se procede en forma similar si $z_1^* = aw_2$, con $0 \leq a \leq 1$ y $z_2^* \in \text{Interior}(P)$.

iii) Caso: si $z_1^* = aw_1$, $z_2^* = bw_2$, con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, basta tomar entornos de z_1^* , $z_1^* + w_2$, z_2^* , $z_2^* + w_1$ que sean disjuntos.

1.1.2. Superficies cocientes bajo la acción de un grupo

Sea X una superficie de Riemann, $G \subset \text{Aut}(X)$ y supongamos que la acción de G sobre X sea una muy buena acción. Denotemos por $X/G = \{\bar{x} : \text{la clase de equivalencia de } x\}$ al conjunto de clases de equivalencia bajo la acción de G y por $\pi : X \rightarrow X/G$ al morfismo canónico al cociente, definido como $\pi(x) = \bar{x}$. Dotemos a X/G de la topología cociente, la cual recordemos se define como el conjunto de los abiertos en X/G tales que su preimagen bajo π es un abierto de X . Se ve entonces que todo abierto de X/G es de la forma $\bar{U} = \{\bar{x} : x \in U\}$. Como la acción de G es muy buena, X/G es Hausdorff, ya que si $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ existen U_{x_1}, U_{x_2} en X tales que

$$g.U_{x_1} \cap h.U_{x_2} = \emptyset, \quad \forall g, h \in G$$

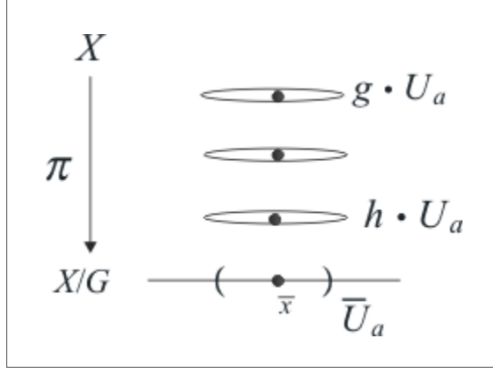
y en consecuencia $\bar{U}_{x_1} \cap \bar{U}_{x_2} = \emptyset$ (si esto no fuese cierto existiría \bar{y} tal que $\bar{y} = \bar{z}_1$, con $z_1 \in U_{x_1}$ y $\bar{y} = \bar{z}_2$, con $z_2 \in U_{x_2}$ y por tanto $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$ lo cual implica que $\exists g \in G$ tal que $g \cdot z_1 = z_2$ de donde se sigue que $g \cdot z_1 \in g \cdot U_{x_1} \cap U_{x_2}$ y en consecuencia $g \cdot U_{x_1} \cap U_{x_2}$ no sería vacío).

Démosle ahora a X/G una estructura holomorfa. Para cada $\bar{x} \in X/G$ sea $\pi^{-1}(\bar{x}) = \{x_\alpha \in X : \pi(x_\alpha) = \bar{x}\}$ la fibra sobre \bar{x} y fijemos $x_\alpha \in \pi^{-1}(\bar{x})$ un punto arbitrario. Como la acción es buena existe U_α un entorno de x_α tal que

$$g \cdot U_{x_1} \cap h \cdot U_{x_2} = \emptyset, \quad \text{si } g \neq h \in G.$$

Afirmación 1.1.21 $\pi^{-1}(\bar{U}_\alpha)$ es la unión disjunta de los abiertos $g \cdot U_\alpha$,

$$\pi^{-1}(\bar{U}_\alpha) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U_\alpha$$



Esto ya que $z \in \pi^{-1}(\bar{U}_\alpha)$ si y sólo si $\bar{z} = \bar{v}$, con $v \in U_\alpha$, es decir, si existe $g \in G$ tal que $z = g \cdot v$ y esto ocurre si y sólo si $z \in g \cdot U_\alpha$.

Afirmación 1.1.22 $\pi|_{g \cdot U_\alpha} : g \cdot U_\alpha \rightarrow \bar{U}_\alpha$ es un homeomorfismo.

π es claramente sobreyectiva.

π es uno a uno: si $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ con $z_1, z_2 \in g \cdot U_\alpha$ se tendría que existe $h \in G$ tal que $z_2 = h \cdot z_1$. Entonces $z_2 \in hg \cdot U_\alpha \cap g \cdot U_\alpha$ y por tanto $hg = g$ lo cual implica que $h = 1$ y en consecuencia $z_1 = z_2$.

π claramente es continua.

$\pi|_{g \cdot U_\alpha}$ es abierta: si $W \subset g \cdot U_\alpha$ es un abierto veamos que $\pi^{-1}(\pi(W)) = \pi^{-1}(\bar{W})$ es abierto en X . Pero ya sabemos que $\pi^{-1}(\bar{W}) = \bigcup_{h \in G} h \cdot W$, y como $h \in \text{Aut}(X)$ es en particular una función abierta, cada $h \cdot W$ es un abierto y por tanto lo es su unión.

Afirmación 1.1.23 Si tomamos U_α suficientemente pequeño podemos garantizar que en él existen coordenadas locales $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$. Definamos $\psi_\alpha : \bar{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ como $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ (\pi|_{U_\alpha})^{-1}$ y veamos que la colección de todas las cartas de esta forma es un atlas holomorfo para X/G . Supongamos que $\bar{V} = \bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta$ es no vacío. Obviamente $\pi^{-1}(\bar{V}) \subset \pi^{-1}(\bar{U}_\alpha)$ y por tanto $\pi^{-1}(\bar{V})$ es igual a la unión disjunta de los abiertos $\pi^{-1}(\bar{V}) \cap g \cdot U_\alpha$, con $g \in G$. Si y es un punto en $\pi^{-1}(\bar{V}) \cap g \cdot U_\alpha$ se tiene que $y = g \cdot y_\alpha$, con $y_\alpha \in U_\alpha$. Como además $\pi(y_\alpha) = \pi(y)$ se sigue que $y_\alpha \in \pi^{-1}(\bar{V})$ y en consecuencia $y_\alpha \in V_\alpha = \pi^{-1}(\bar{V}) \cap U_\alpha$ y por consiguiente $y \in g \cdot V_\alpha$. Recíprocamente, si $y \in g \cdot V_\alpha$ es obvio que $y \in \pi^{-1}(\bar{V}) \cap g \cdot U_\alpha$. Esto muestra que

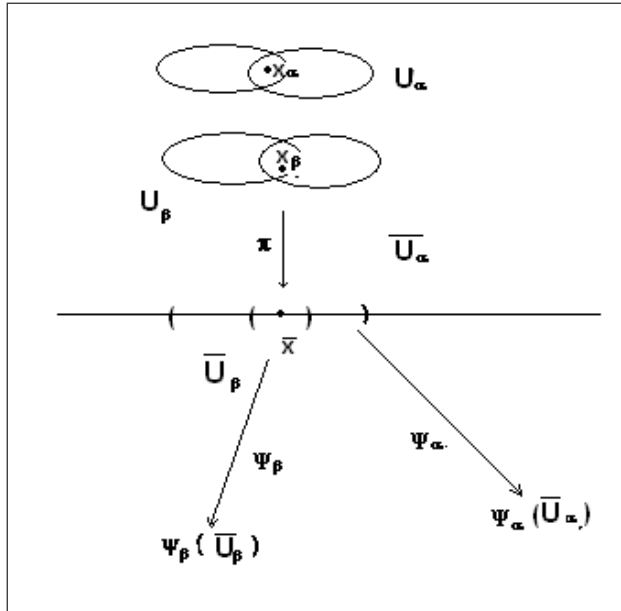
$$\pi^{-1}(\bar{V}) = \bigcup_{g \in G} (\pi^{-1}(\bar{V}) \cap g \cdot U_\alpha) = \bigcup_{g \in G} (g \cdot V_\alpha)$$

Sea $y_\alpha \in V_\alpha$ y $\bar{y} = \pi(y_\alpha)$. Como $\pi|_{U_\beta} : U_\beta \rightarrow \bar{U}_\beta$ es un homeomorfismo, existe un único $y_\beta \in U_\beta$ con $\pi(y_\beta) = \bar{y}$. Pero como $y_\beta \in \pi^{-1}(\bar{V})$ existe un único $h \in G$ tal que $y_\beta \in h \cdot V_\alpha$ y por tanto $h \cdot y_\alpha = y_\beta$. Luego

$$((\pi_\beta|_{\bar{V}})^{-1} \circ \pi_\alpha|_{V_\alpha})(y_\alpha) = (\pi_\beta|_{\bar{V}})^{-1}(\bar{y}) = y_\beta = h \cdot y_\alpha,$$

lo cual muestra que $(\pi_\beta|_{\bar{V}})^{-1} \circ \pi_\alpha|_{V_\alpha} = h|_{V_\alpha}$. De aquí se sigue que

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}|_{\bar{V}} = \varphi_\beta \circ ((\pi|_{\bar{V}})^{-1} \circ \pi|_{V_\alpha}) \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$



Como h es holomorfa vemos que $\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}$ también lo es y por tanto $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ es holomorfa.

El ejemplo 1.1.17 es un caso particular de esta construcción en el que las funciones $\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}$ resultan ser translaciones.

1.1.3. Funciones holomorfas en \mathbb{C}^2 y teorema de la función inversa

Definición 1.1.24 una función $h : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se llama holomorfa en U si h es continua y para cada $(z_0, w_0) \in U$ las funciones $h_{z_0}(w) = h(z_0, w)$ y $h_{w_0}(z) = h(z, w_0)$ son holomorfas.

Teorema 1.1.25 (Teorema de la función inversa) Sea $F : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ holomorfa, es decir, $F(z, w) = (f_1(z, w), f_2(z, w))$ con f_1 y f_2 holomorfas. Supongamos que en un punto $p = (z_0, w_0) \in U$ se cumple que $\det(dF(p)) \neq 0$, donde $dF(p)$ es la matriz jacobiana compleja en p de F

$$dF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(p) \end{pmatrix}.$$

Entonces existen entornos abiertos $U_p \subset U$ y $V_{F(p)}$ tales que:

- i) $F : U_p \rightarrow V_{F(p)}$ es biyectiva y holomorfa.
- ii) Si $G = F^{-1}$, $G : V_{F(p)} \rightarrow U_p$ es holomorfa.

Antes de dar la demostración haremos las siguientes afirmaciones, todas elementales, y cuyas demostraciones se dejan como ejercicio para el lector.

1. Existe un isomorfismo de anillos entre \mathbb{C} y el conjunto \mathbf{C} de las matrices reales 2×2 de la forma

$$\mathbf{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

dato por la función $\lambda(a+ib) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. A su inversa la denotaremos por μ .

2. Si denotamos por \mathbf{E} al conjunto de matrices 4×4 con entradas reales

$$\mathbf{E} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \text{ con } A, B, C, D \in \mathbf{C} \right\}$$

entonces se verifica inmediatamente que \mathbf{E} es un subanillo del anillo $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

3. Existe un isomorfismo de anillos $\Psi : \mathbf{E} \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ definido como

$$\Psi \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mu(A) & \mu(B) \\ \mu(C) & \mu(D) \end{bmatrix}$$

4. Como λ es un isomorfismo entonces $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es invertible si y solo si $\Psi \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right)$ es invertible.

Prueba. (Teorema de la función inversa) $F : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ puede ser vista como una función de un abierto de \mathbb{R}^4 en \mathbb{R}^4 de la siguiente manera: si $z = x_1 + iy_1, w = x_2 + iy_2$ existen funciones suaves con valores reales U_1, V_1, U_2, V_2 tales que

$$\begin{aligned} f_1(z, w) &= U_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV_1(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ f_2(z, w) &= U_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV_2(x_1, y_1, x_2, y_2) \end{aligned}$$

Definamos

$$F^*(x_1, y_1, x_2, y_2) = (U_1(x_1, y_1, x_2, y_2), V_1(x_1, y_1, x_2, y_2), U_2(x_1, y_1, x_2, y_2), V_2(x_1, y_1, x_2, y_2)).$$

Si $z_0 = a_0 + b_0i, w_0 = c_0 + d_0i$ y $p = (a_0, b_0, c_0, d_0)$, entonces la matriz jacobiana de F^* en p esta dada por:

$$dF^*(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial U_1}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial U_1}{\partial y_2}(p) \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial V_1}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial V_1}{\partial y_2}(p) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial U_2}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial U_2}{\partial y_2}(p) \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial V_2}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial V_2}{\partial y_2}(p) \end{bmatrix}$$

Esta matriz puede leerse en bloques como una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

donde, por ejemplo, la matriz A es igual a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial U_1}{\partial y_1}(p) \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial V_1}{\partial y_1}(p) \end{bmatrix}.$$

Como $f_1(z, w)$ es holomorfa en cada variable se tiene que $g(z) = f_1(z, w)$ es holomorfa y $\lambda(g'(z)) = \lambda\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = A$, que es una matriz de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, por satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En consecuencia A se mapea bajo μ en $\frac{\partial f_1}{\partial z}$. En forma similar se demuestra que las

B, C y D son enviadas bajo μ en $\frac{\partial f_1}{\partial w}(p)$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}(p)$ y $\frac{\partial f_2}{\partial w}(p)$, respectivamente.

De aquí que

$$\Psi(dF^*(p)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(p) \end{bmatrix}$$

que es una matriz invertible, por hipótesis. Luego $dF^*(p)$ también lo es, y por el teorema de la función inversa para funciones suaves en \mathbb{R}^4 , existen $U_p \subset U$, $V_{F^*(p)} \subset \mathbb{R}^4$ tales que $F^* : U_p \rightarrow V_{F^*(p)}$ es biyectiva, con inversa suave $G^* : V_{F^*(p)} \rightarrow U_p$. Ahora, la diferencial de G^* en $F^*(p)$ tiene la forma

$$dG(F^*(p)) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \text{ con } A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathbf{C}.$$

Si escribimos esta función en coordenadas complejas como $G(z, w) = (g_1(z, w), g_2(z, w))$ se ve que $\lambda\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\right) = A_1$, $\lambda\left(\frac{\partial g_1}{\partial w}\right) = B_1$, $\lambda\left(\frac{\partial g_2}{\partial z}\right) = C_1$ y $\lambda\left(\frac{\partial g_2}{\partial w}\right) = D_1$. Como $A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathbf{C}$ se sigue que g_1 y g_2 satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann y son por tanto holomorfas en cada variable. Luego G es holomorfa.

■

Capítulo 2

Curvas algebraicas

2.1. Preliminares de topología algebraica

En esta sección clasificaremos todos los cubrimientos del disco unitario perforado $D^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$. Para ello haremos uso de algunos conceptos y teoremas básicos de la topología algebraica. El lector interesado puede consultar mi monografía (*Notas para un primer curso de topología algebraica*, J.D. Vélez U. Nal. 2007) donde encontrará un tratamiento completo de cada tema. Haremos uso de los siguientes conceptos y resultados.

Si $p : Y \rightarrow X$ es un mapeo recubridor, usaremos la notación $p : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ para indicar que $p(y) = x$. Recordemos que dos recubrimientos $p_1 : (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x)$ y $p_2 : (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x)$ se denominan isomorfos si existe un homeomorfismo $\varphi : (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$ tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$

$$\begin{array}{ccc} (Y_1, y_1) & \xrightarrow{\varphi} & (Y_2, y_2) \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & (X, x) & \end{array}$$

Recordemos que todo espacio topológico X que satisfaga algunas condiciones razonables de conexidad (por ejemplo, si X es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n), posee un espacio recubridor universal. Es decir, existe un mapeo recubridor $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ tal que X es conexo y simplemente conexo, es decir, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$. Además, el par $((\tilde{X}, \tilde{x}_0), p)$ es único salvo isomorfismos de recubrimientos.

Sea $D^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ el disco unitario perforado y z_0 un punto cualquiera de D^* . Se prueba fácilmente que $\pi_1(D^*, z_0)$ es un grupo isomorfo a \mathbb{Z} con generador $[\gamma]$, donde $\gamma(t) = re^{2\pi it}$, con $0 < r < 1$. Es decir $\pi_1(D^*, z_0) \simeq \mathbb{Z}$. Por otro lado, se demuestra que el espacio recubridor uni-

vesal de D^* es el semiplano izquierdo $H = \{z : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ con la función $p : H \rightarrow D^*$, dada por $p(z) = e^{2\pi z}$.

Para clasificar los recubrimientos de D^* necesitaremos el siguiente lema de "levantamiento de mapeos".

Lema 2.1.1 *Sean $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ un cubrimiento, $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ una función continua y Z es un espacio arco conexo. Entonces existe un único $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f = p \circ \tilde{f}$*

$$\begin{array}{ccc} & (Y, y_0) & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

si y solo si $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1((Y, y_0)) & \\ \tilde{f}_* \nearrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1((Z, z_0)) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1((X, x_0)) \end{array}$$

Teorema 2.1.2 *Sea $p : (Y, y_0) \rightarrow (D^*, z_0)$ un cubrimiento del disco perforado. Entonces si el grado del mapeo es n existe un homeomorfismo $h : (D^*, z_1) \rightarrow (Y, y_0)$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (D^*, z_1) & \xrightarrow{h} & (Y, y_0) \\ & \searrow z^n & \downarrow p \\ & & (D^*, z_0) \end{array}$$

donde z_1 es cualquier raíz n -ésima de z_0 .

Prueba. Sea $H = p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(D^*, z_0) \simeq \mathbb{Z}$. Sabemos que la cardinalidad de la fibra de p es igual a $|\pi_1(D^*, z_0)/H| = n$ y por tanto H es el subgrupo generado por $n[\gamma]$. Como $f_*([\gamma]) = n[\gamma]$, por el lema anterior existe

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 21

un levantamiento $h : (D^*, z_1) \rightarrow (Y, y_0)$, es decir, una función continua tal que $p \circ h = f$

$$\begin{array}{ccc} & (Y, y_0) & \\ & \downarrow p & \\ h \nearrow & & \\ (D^*, z_1) & \xrightarrow{f} & (D^*, z_0) \end{array}$$

Nuevamente, por el lema, existe $g : (Y, y_0) \rightarrow (D^*, z_0)$ tal que $f \circ g = p$. Notemos que $g \circ h$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & (D^*, z_1) & \\ & \downarrow f & \\ g \circ h \nearrow & & \\ (D^*, z_1) & \xrightarrow{f} & (D^*, z_0) \end{array}$$

es decir, $g \circ h$ es un levantamiento de f . Pero la identidad también lo es y por la unicidad del levantamiento se obtiene que $g \circ h = Id_{(D^*, z_1)}$. En forma similar se demuestra que $h \circ g = Id_{(Y, y_0)}$. ■

Ejercicio 2.1.3 Demuestre que si el grado de $p : (Y, y_0) \rightarrow (D^*, z_0)$ es infinito entonces este cubrimiento es isomorfo a cubrimiento $\pi : (H, w_1) \rightarrow (D^*, z_0)$ dado por $\pi(z) = e^{2\pi z}$, para un cierto $w_1 \in H$.

2.2. Superficie de Riemann asociada a curva algebraica

Sea $f(z, w)$ un polinomio en $\mathbb{C}[z, w]$ y $X(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$ sus ceros en \mathbb{C}^2 . A X se le denomina una *curva algebraica afín plana* o simplemente una *curva algebraica*. En esta sección veremos que el complemento de los puntos críticos de $X(f)$ en $X(f)$, que denotaremos por $X^0(f)$, es una superficie de Riemann. Estudiaremos la estructura de $X(f)$ considerando esta curva como una fibración sobre el plano complejo dada por $\pi : X(f) \rightarrow \mathbb{C}$, la proyección en la primera componente. Mostraremos que existe una superficie de Riemann $\bar{X}(f)$ compacta y una función holomorfa a la esfera

$p : \overline{X}(f) \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} X(f) & \subset & \overline{X}(f) \\ \pi \downarrow & & p \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{(z^0)^{-1}} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad (2.1)$$

donde $z^0 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ denota la coordenada $z^0([a_0, a_1]) = a_1/a_0$ en $U_0 = \{[a_0, a_1] : a_0 \neq 0\}$.

Definición 2.2.1 Un punto $p \in X(f)$ se llama singular si $\partial f/\partial z(p) = \partial f/\partial w(p) = 0$. Un punto que no sea singular se llama un punto suave de X . La curva X se llama suave si todos sus puntos son suaves.

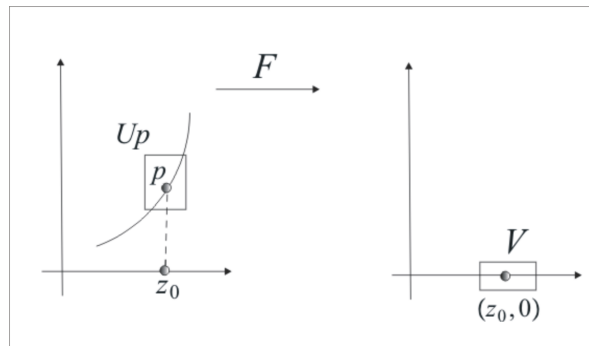
Notemos que la continuidad de las derivadas parciales garantiza que el conjunto de puntos singulares $\text{Sing}(X(f))$ es un subconjunto cerrado de $X(f)$.

Proposición 2.2.2 Si $X = X(f)$ es una curva suave, con la topología que hereda de \mathbb{C}^2 , X puede dotarse de un atlas que la convierte en una superficie de Riemann.

Prueba. Claramente X es un espacio Hausdorff segundo contable por serlo así \mathbb{C}^2 . Ahora, sea $p = (z_0, w_0) \in X$, y digamos que $\partial f/\partial w(p) \neq 0$. Entonces si $F : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ es la función $F(z, w) = (z, f(z, w))$, su matriz jacobiana compleja en p

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \partial f/\partial z(p) & \partial f/\partial w(p) \end{bmatrix}$$

tiene determinante igual a $\partial f/\partial w(p) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa existen entornos abiertos U_p y $V_{(z_0, 0)}$ tales que $F : U_p \rightarrow V_{(z_0, 0)}$ es biholomorfa.



2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 23

Denotemos por V_{z_0} al conjunto $V_{z_0} = \{z : (z, 0) \in V_{(z_0, 0)}\}$, por $G(z, w)$ a la función inversa de F y por $g_1 : V_{z_0} \rightarrow U_p$ a la función $g_1(z) = G(z, 0)$. Claramente V_{z_0} es un abierto de \mathbb{C} y g_1 es holomorfa e inyectiva (ya que G lo es). Veamos que $g_1(V_{z_0}) = U_p \cap X$. Si $z \in V_{z_0}$, como $F(G(z, 0)) = (z, 0)$, se sigue que $f(g_1(z)) = 0$ y por tanto $g_1(z) \in U_p \cap X$. Por otro lado, si $(z, w) \in U_p \cap X$ se tiene que $F(z, w) = (z, 0)$ y en consecuencia

$$(z, w) = G(F(z, w)) = G(z, 0) = g_1(z).$$

Notemos además que si $\pi_1(z, w) = z$ denota la proyección en la primera coordenada, la ecuación anterior muestra que $g_1(\pi_1(z, w)) = (z, w)$ y en consecuencia $\pi_1 : U_p \rightarrow V_{z_0}$ es una función holomorfa con inversa $g_1 : V_{z_0} \rightarrow U_p$. En forma similar, si $\partial f / \partial z(p) \neq 0$, podemos construir una función holomorfa y biyectiva $g_2 : V_{w_0} \rightarrow U_p \cap X$ tal que $g_2(V_{w_0}) = U_p \cap X$ con inversa $\pi_2(z, w) = w$.

Definamos como atlas para X al conjunto de parejas $\{(U_p, \pi_i)\}_{p \in X}$, donde i se escoge como 1 ó 2 dependiendo de si $\partial f / \partial w(p) \neq 0$ ó $\partial f / \partial z(p) \neq 0$. Las funciones de transición entre coordenadas son claramente holomorfas, ya que son de la forma $\pi_i \circ \pi_j^{-1} = \pi_i \circ g_j$ o de la forma $\pi_j \circ \pi_i^{-1} = \pi_j \circ g_i$, ambas compuestas de funciones holomorfas. ■

2.2.1. Propiedades básicas de los morfismos entre superficies de Riemann

En esta sección supondremos que *todas las superficies de Riemann son conexas*.

Sean X y Y superficies de Riemann, $f : X \rightarrow Y$ un morfismo *no constante* y sean $p \in X$ y $q = f(p) \in Y$. Escojamos cartas $z^0 : U_p \rightarrow \tilde{U}_0$ y $w^0 : V_q \rightarrow \tilde{V}_0$ alrededor de p y q . Por el teorema de estructura local de toda función holomorfa sabemos que existen entornos U'_0 y V'_0 y funciones biholomorfas $\lambda : \tilde{U}_0 \rightarrow U'_0$ y $\sigma : \tilde{V}_0 \rightarrow V'_0$ tales que si h denota la función holomorfa $w^0 \circ f \circ (z^0)^{-1}$ se tiene que $\sigma \circ h \circ \lambda^{-1}$ es la función que envía a z en z^n para un cierto $n > 0$.

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{f} & V_q \\ z^0 \downarrow & & \downarrow w^0 \\ \tilde{U}_0 & \xrightarrow{w^0 \circ f \circ (z^0)^{-1}} & \tilde{V}_0 \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \sigma \\ U'_0 & \xrightarrow{z^n} & V'_0 \end{array}$$

Escojamos $r > 0$ tal que $D_1 = D(0, r^{1/n}) \subset U'_0$ y $D_2 = D(0, r) \subset V'_0$. Después de cambiar a U_p por $(\lambda \circ z^0)^{-1}(D_1)$ y a V_q por $(\sigma \circ w^0)^{-1}(D_2)$ podemos suponer que U'_0 y V'_0 son discos abiertos de radios $r^{1/n}$ y r . Después de multiplicar por $1/r^{1/n}$ y por $1/r$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que estos dos discos son unitarios. Como consecuencia de esta construcción se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3 Sean X y Y superficies de Riemann, $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante y sean $p \in X$ y $q = f(p) \in Y$. Existen coordenadas locales (U_p, ϕ) y (V_q, ψ) alrededor de p y q tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : D \rightarrow D$ es la función del disco unitario que envía a z en z^n , para un cierto $n > 0$.

Observación 2.2.4 El entero n está determinado por f . Para ello notemos primero que dado cualquier entorno abierto $A_p \subset U_p$ existe otro entorno abierto $B_q \subset V_q$ tal que cada $q' \in B_q$ tiene exactamente n preimágenes en A_p . Esta afirmación es cierta si A_p y B_q se reemplazan por entornos del origen en D y f por la función $z \mapsto z^n$, como se ve fácilmente, y por tanto se sigue del hecho de que ϕ y ψ son homeomorfismos. Así, si existieran otras coordenadas locales (U'_p, ϕ') y (V'_q, ψ') alrededor de p y q tales que $\psi' \circ f \circ \phi'^{-1} : D \rightarrow D$ envía a z en z^m , podríamos tomar $A_p = U'_p$ y B_q tal que cada q' en B_q y en particular en $B_q \cap V'_q$ tendría n preimágenes en U'_p . Pero todo punto de V'_q tiene m preimágenes en U'_p . Luego $m = n$.

Como corolario de la proposición anterior se deducen inmediatamente las siguientes afirmaciones.

Corolario 2.2.5 (Con la notación de la proposición anterior)

1. La fibra sobre cada punto $q \in Y$ es un conjunto discreto, es decir, alrededor de cada punto de la fibra existe un entorno abierto que sólo contiene dicho punto y ningún otro de la fibra.
2. El morfismo f es una función abierta.
3. Si X es compacto, $f(X) \subset Y$ también lo es. Por ser f abierta $f(X)$ también es abierto. Como Y es conexa se tiene que $f(X) = Y$ y por tanto Y es compacto y f es sobreyectiva.
4. Si $Y = \mathbb{C}$, del numeral anterior se sigue que la función f tiene que ser constante, ya que \mathbb{C} no es compacto. Es decir, las únicas funciones holomorfas en una superficie compacta X son las constantes.

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 25

Corolario 2.2.6 Si $f : U \rightarrow V$ es una función holomorfa y biyectiva su inversa también es holomorfa.

Prueba. Para cada $a \in U$ existen abiertos $U_a \subset U$ y $V_{f(a)}$ y biholomorfismos $\lambda : U_a \rightarrow U_0$ y $\sigma : V_{f(a)} \rightarrow V_0$ tales que $\sigma \circ f \circ \lambda^{-1}(z) = z^n$, con $n > 0$. Si $n > 1$ la función f no sería inyectiva en U_a . Por tanto $n = 1$ y $f^{-1} = \lambda^{-1} \circ \sigma$.

■

Definición 2.2.7 Al entero n se le llama el grado de f en p y se denotará por $\text{gr}_f(p)$. Si $\text{gr}_f(p) > 1$ el punto p se llama un punto crítico y a $q = f(p)$ se le llama un valor crítico. Si p no es crítico se llama punto regular, y similarmente, si q no es valor crítico se llama un valor regular.

Notación 2.2.8 A las coordenadas dadas por la proposición 2.2.3 las llamaremos coordenadas locales en las cuales f es equivalente a la función $z \mapsto z^{\text{gr}_f(p)}$ o coordenadas locales donde f tiene grado local $\text{gr}_f(p)$.

Observación 2.2.9 Denotemos por h a la función $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : D \rightarrow D$ y por D^*, U_p^* y V_q^* al disco unitario abierto menos el origen, el entorno U_p quitando el punto p y V_q quitando a q . Como $h : D^* \rightarrow D^*$ es un mapeo recubridor (ver notas de topología) es en particular un homeomorfismo local de lo cual se sigue que la restricción $f : U_p^* \rightarrow V_q^*$ también lo es. De aquí que el grado de f en cada punto $p' \in U_p^*$ deba ser 1 y en consecuencia, si $\text{gr}_f(p) = 1$, f no posee ningún punto crítico en U_p y en el caso en el que $\text{gr}_f(p) > 1$, el único punto crítico contenido en U_p es p . Esto muestra que los puntos regulares forman un abierto en X y los puntos críticos son aislados.

Recordemos que $f : X \rightarrow Y$ se denomina una función *propia* si la preimagen de cada compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$, es un conjunto compacto en X . Por ejemplo, si X y Y son espacios Hausdorff, X es compacto y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces f es propia, ya que si $K \subset Y$ es compacto entonces es cerrado y $f^{-1}(K)$ es un cerrado en X y por tanto compacto.

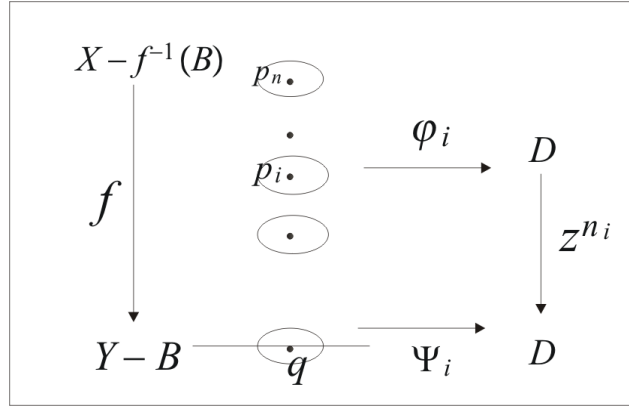
Mostremos que para funciones propias los valores críticos así como cada fibra es un conjunto finito.

Proposición 2.2.10 Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no constante de superficies de Riemann con X compacta.

1. Para cada $q \in Y$ la fibra $f^{-1}(q)$ es finita.
2. El conjunto de todos los puntos críticos de f es finito y por consiguiente también lo es B , el conjunto de todos los valores críticos.

3. Denotemos por X^0, Y^0 a los abiertos $X - f^{-1}(B)$ y $Y^0 = Y - B$. La restricción $f : X^0 \rightarrow Y^0$ es un mapeo recubridor y por tanto las fibras $f^{-1}(q)$ sobre cada $q \in Y^0$ tienen la misma cardinalidad, $\text{gr}(f)$, llamada el grado de f .

4. Para cada $q \in Y$, si $f^{-1}(q) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ entonces $\sum_{i=1}^r \text{gr}_f(p_i) = \text{gr}(f)$.



Prueba. Del corolario 2.2.5 sabemos que para cada $p_i \in f^{-1}(q)$ existe un abierto $U_{p_i} \subset X$ tal que $f^{-1}(q) \cap U_{p_i} = \{p_i\}$. Como X es compacta, $f^{-1}(q)$ también es compacto y por consiguiente del cubrimiento $\{U_{p_i}\}_{p_i \in f^{-1}(q)}$ puede sacarse un cubrimiento finito lo que obviamente fuerza a que $f^{-1}(q)$ sea un conjunto finito.

Denotemos por A al conjunto de puntos críticos de f . Sabemos por la observación 2.2.9 que A es cerrado en X y por tanto compacto. Como además es un conjunto discreto, tiene que ser finito.

Para cada $q \in Y$ sea $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_r\}$ su fibra y sean U_{p_i}, V_q^i entornos alrededor de cada p_i y q tal que f tenga grado local $\text{gr}_f(p_i)$. Como X es Hausdorff, podemos escoger $U'_{p_i} \subset U_{p_i}$ tales que $U'_{p_i} \cap U'_{p_j} = \emptyset$, si $i \neq j$. Como f es abierta vemos que $(V_q^i)' = f(U'_{p_i})$ es un entorno abierto de q . Sea $Z = X - \bigcup_{i=1}^n U'_{p_i}$ y $V_q = (Y - f(Z)) \cap \bigcap_{i=1}^n (V_q^i)'$. Como Z es cerrado en X es compacto lo cual implica que $f(Z)$ también lo es y por tanto su complemento $Y - f(Z)$ es abierto en Y . Claramente $q \notin f(Z)$, ya que su fibra no está en Z (está obviamente en la unión $\bigcup_{i=1}^n U'_{p_i}$). Luego V_q es un entorno abierto de q . Sea $W_{p_i} = f^{-1}(V_q) \cap U'_{p_i}$. Claramente estos abiertos son disjuntos por pares y la restricción de f a $W_{p_i} \subset U_{p_i}$, $f : W_{p_i} \rightarrow V_q$ también tiene grado local $\text{gr}_f(p_i)$. Además, si $f(p) \in V_q$ se tiene que $f(p) \notin f(Z)$ y por

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 27

consiguiente $p \notin Z$ lo cual fuerza a que $p \in U'_{p_i}$ para algún i y en consecuencia $p \in W_{p_i} = f^{-1}(V_q) \cap U'_{p_i}$. Esto muestra que $f^{-1}(V_q) \subset \bigcup_{i=1}^r W_{p_i}$. Como cada W_{p_i} está por definición en $f^{-1}(V_q)$ se tiene que $\bigcup_{i=1}^r W_{p_i} \subset f^{-1}(V_q)$ de donde se sigue la igualdad $f^{-1}(V_q) = \bigcup_{i=1}^r W_{p_i}$.

En el caso en el que q sea un valor regular, $f : W_{p_i} \rightarrow V_q$ tiene grado local 1 y por tanto cada término en la suma es igual a 1 y esta suma es por tanto el número de puntos en la fibra sobre q . Si q es valor crítico, para cada $q' \in V_q$ hay exactamente $\text{gr}_f(p_i)$ preimágenes en W_{p_i} y por tanto hay $\sum_{i=1}^r \text{gr}_f(p_i)$ en total. De aquí que $\sum_{i=1}^r \text{gr}_f(p_i) = \text{gr}(f)$. ■

2.2.2. Preliminares algebraicos

Regresemos a nuestro análisis del conjunto $X = X(f)$ de ceros en \mathbb{C}^2 de un polinomio en dos variables $f(z, w)$. En primer lugar mostraremos que existe un cambio lineal de coordenadas en \mathbb{C}^2 que lleva a f a una forma estándar que hace más simple el estudio de X .

Proposición 2.2.11 *Sea $f(z, w)$ un polinomio en z, w y $X = X(f)$ la curva algebraica que él define en \mathbb{C}^2 . Existe una transformación lineal $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $\phi(z, w) = (z - \lambda w, w)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ apropiado, tal que $\phi(X) = X(g(z, w))$, donde*

$$g(z, w) = w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_d(z) \quad (2.2)$$

y tal que $a_i(z) = 0$ o grado $a_i(z) \leq i$, $i = 1, \dots, d$.

Prueba. Sea $f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0$, donde cada f_k es un polinomio homogéneo de grado k , $f_k(z, w) = \sum_{m+n=k} c_{(m,n)} z^m w^n$, con $c_{(m,n)} \neq 0 \in \mathbb{C}$.

Definamos $g(z, w) = f(z + \lambda w, w)$. Si expandemos cada monomio de f se obtiene

$$\begin{aligned} g(z, w) &= \sum_k f_k(\lambda w + z, w) = (\sum_{m+n=d} c_{(m,n)} \lambda^m) w^d + \\ &+ (\sum_{m+n=d} c_{(m,n)} \binom{m}{1} \lambda^{m-1} z + \sum_{m+n=d-1} c_{(m,n)} \lambda^m) w^{d-1} + \\ &+ a_k(z) w^{d-k} + \cdots + a_d(z), \end{aligned}$$

donde

$$a_k(z) = \sum_{s=0}^k \sum_{m+n=d-s} c_{(m,n)} \binom{m}{k-s} \lambda^{m-k+s} z^{k-s}$$

que es claramente un polinomio de grado a lo sumo k . Escojamos λ de tal manera que el coeficiente de w^d , $\sum_{m+n=d} c(m,n)\lambda^m$, sea igual a 1. Es claro entonces que $g(z, w)$ es de la forma (2.2) y que

$$g(\phi(z_0, w_0)) = g(z_0 - \lambda w_0, w_0) = f(z_0 - \lambda w_0 + \lambda w_0, w_0) = f(z_0, w_0),$$

de donde se sigue que $f(z_0, w_0) = 0$ sii $g(\phi(z_0, w_0)) = 0$ y en consecuencia que $\phi(X) = X(g(z, w))$. ■

Observación 2.2.12 Sea $\frac{\partial f}{\partial w}$ la derivada parcial de f con respecto a w . Recordemos que una raíz w_0 de $f(w)$ tiene multiplicidad mayor que 1 si y sólo si $f(w_0) = f'(w_0) = 0$. Esto último ya que si w_0 es raíz, entonces se tiene que $f(w) = (w - w_0)^n g(w)$, con $n \geq 1$ y $g(w_0) \neq 0$ y por tanto

$$f'(w) = (w - w_0)^n g'(w) + n(w - w_0)^{n-1} g(w).$$

Calaramente w_0 es raíz de $f'(w)$ si y sólo si $n > 1$. De aquí que w_0 es raíz múltiple de $f(z_0, w)$ si y sólo si

$$f(z_0, w_0) = \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) = 0. \quad (2.3)$$

En la siguiente sección veremos cómo determinar explícitamente aquellos valores de z_0 para los cuales se satisface la ecuación (2.3).

Resultantes

Sean $f = a_0 + a_1 w + \dots + a_l w^l$ y $g = b_0 + b_1 w + \dots + b_k w^k$ dos polinomios en $D[w]$ de grados l y k respectivamente, donde D denota un dominio de factorización única. El resultante de f y g se define como el determinante de la matriz cuadrada de lado $l + k$ siguiente:

$$\text{res}(f, g) = \det \begin{bmatrix} a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & b_0 & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 & b_1 & b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_l & a_{l-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_l & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_l & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_k & b_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_l & \cdot & \cdot & \cdot & b_k \end{bmatrix}$$

donde las A_i, B_j son $k + l$ incógnitas. Este sistema se obtiene después de igualar coeficientes a ambos lados de la ecuación $Af + Bg = 0$. Escribiendo este sistema en forma matricial se obtiene una ecuación de la forma $CV = [0]$, donde C denota la matriz de la izquierda y V el vector de la derecha

$$\begin{bmatrix} a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & b_0 & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 & b_1 & b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_l & a_{l-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_l & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_l & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_k & b_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_l & \cdot & \cdot & \cdot & b_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{k-1} \\ B_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{l-1} \end{bmatrix}$$

Si consideramos este sistema de ecuaciones como un sistema con coeficientes en F , el campo de fracciones de D , entonces, sabemos por álgebra lineal que el sistema tiene una solución no trivial en F si y sólo si el determinante de C , que es precisamente el resultante de f y g , es igual a cero. Pero de toda solución no trivial en F se puede obtener, después de multiplicar por un elemento apropiado de D , una solución no trivial en D . Este elemento se puede escoger, por ejemplo, como el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada entrada del vector solución V . De aquí se deduce entonces la equivalencia entre 2 y 3 lo cual concluye la prueba de la proposición. ■

Como corolario de la observación 2.2.12 y de la proposición anterior se sigue que:

Corolario 2.2.14 *Sea $f(z, w)$ un polinomio en $\mathbb{C}[z, w]$ y $\partial f / \partial w$ su derivada parcial con respecto a w . Entonces el conjunto de aquellos valores de z para los cuales $f_z(w) = f(z, w)$ tiene una raíz múltiple coincide con las raíces del polinomio resultante $d_f(z) = \text{res}(f, \partial f / \partial w)$, también llamado el discriminante de f*

$$\begin{aligned} & \{z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0, w) = 0 \text{ tiene una raíz múltiple}\} \\ & = \{z_0 : d_f(z_0) = 0\} \end{aligned}$$

Prueba. Después de un cambio apropiado de coordenadas podemos suponer que f tiene la forma $w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_d(z)$, $d > 0$. Es obvio que f y

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 31

$\partial f/\partial w$ satisfacen las condiciones de la proposición 2.2.13 de lo cual se sigue inmediatamente el corolario. ■

En el próximo lema mostraremos que las raíces de un polinomio varían continuamente como función de los coeficientes, un hecho que necesitaremos más adelante para demostrar que toda curva irreducible es conexa.

Definición 2.2.15 Sean $A = (a_1, \dots, a_d)$ y $B = (b_1, \dots, b_d)$ dos d tuplas de complejos (con posible repetición). Para cada permutación $\sigma \in S_d$ sea $d(\sigma) = \max\{|a_i - b_{\sigma(i)}| : i = 1, \dots, d\}$. Definimos la distancia entre las dos tuplas como $d(A, B) = \min\{d(\sigma) : \sigma \in S_d\}$.

Lema 2.2.16 Sean $f(t) = \sum c_i t^i, g(t) = \sum d_i t^i$ polinomios mónicos de grado d con coeficientes en \mathbb{C} . Supongamos que $F = (a_1, \dots, a_d)$ y $G = (b_1, \dots, b_d)$ son las raíces de f y g , respectivamente (con posibles repeticiones). Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$|f - g| = \max\{|c_i - d_i| : i = 1, \dots, d\} < \delta$$

entonces $d(F, G) < \varepsilon$.

Prueba. La afirmación en el teorema es equivalente a demostrar que si g_n es una secuencia de polinomios mónicos de grado d tal que $|g_n - f| \rightarrow 0$ entonces $d(G_n, F) \rightarrow 0$, donde $G_n = (b_{n,1}, \dots, b_{n,d})$ y $F = (a_1, \dots, a_d)$ son las raíces de g_n y f . Razonemos por inducción sobre d . Para $d = 0$ el teorema es trivial. Ahora, sea $a = a_1$ una de las raíces de f . Es fácil ver que $g'_n = g_n(t + a) \rightarrow f' = f(t + a)$. Como las raíces de g'_n y f' son $G'_n = (b_{n,1} - a, \dots, b_{n,d} - a)$ y $F' = (0, \dots, a_d - a_1)$, basta demostrar la afirmación del lema para la secuencia $g'_n \rightarrow f'$. Refrescando la notación, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f tiene a cero como una de sus raíces.

Ahora, como 0 es raíz, el término constante de f es cero. Esto fuerza a que el término constante de g_n , l_n , tienda a cero. Pero este término es, en valor absoluto, el producto de todas sus raíces. Luego, dado $N > 0$ existe un entero $n(N)$ tal que para todo $n \geq n(N)$, $|l_n| < (1/N)^d$ y en consecuencia existe una raíz de g_n tal que $|b_{n,i}| < 1/N$, ya que si $|b_{n,i}| \geq 1/N$, para todo $i = 1, \dots, d$, se tendría que $|l_n| = |b_{n,1}| \cdots |b_{n,d}| \geq (1/N)^d$. Lo anterior nos permite pasar a una subsecuencia de la secuencia original, que abusando de la notación, también denotaremos por g_n , en donde cada uno de estos polinomios tiene al menos una raíz, que denotaremos simplemente como b_n , tal que $|b_n| < 1/n$. Sea $h_n(t) = g_n(t + b_n)$. Como $b_n \rightarrow 0$ se verifica fácilmente que $h_n(t) \rightarrow f(t)$. Ahora, si H_n denota el conjunto de raíces de h_n , para ver

que $d(G_n, F) \rightarrow 0$ basta ver que $d(H_n, F) \rightarrow 0$, debido a que $b_n \rightarrow 0$. Pero cada h_n y f tienen a cero como raíz y por consiguiente $h_n = th_n^*$ y $f = tf^*$, con h_n^* y f^* polinomios en t , de lo cual se sigue que $h_n^* \rightarrow f^*$ y la hipótesis de inducción garantiza que si F^* y H_n^* son las raíces de f^* y h_n^* entonces $d(H_n^*, F^*) \rightarrow 0$. Pero esto claramente implica que $d(H_n, F) \rightarrow 0$. ■

Condición 2.2.17 Supondremos a lo largo de esta sección que f tiene la forma (2.2), que llamaremos "forma estándar", y que es además irreducible en $\mathbb{C}[z, w]$. Esto último no le quita ninguna generalidad a nuestro análisis, ya que por ser $C[z, w]$ un dominio de factorización única, f admite una factorización en factores irreducibles $f = f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$ y en consecuencia la curva $X(f)$ es igual a una unión finita de curvas irreducibles $X(f_1) \cup \cdots \cup X(f_s)$.

A continuación veamos que la proyección $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ define un mapeo ramificado por fuera del conjunto discriminante.

Proposición 2.2.18 *Sea $f(z, w)$ una curva irreducible de grado d . Denotemos por X a los ceros de f en \mathbb{C}^2 y por $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ a la proyección $\pi(z, w) = z$. Sea $B = \{z_0 \in \mathbb{C} : d_f(z_0) = 0\}$ el conjunto discriminante de f . Entonces si $X^0 = X - \pi^{-1}(B)$, la restricción $\pi : X^0 \rightarrow \mathbb{C} - B$ es un mapeo recubridor.*

Prueba. Sea $z_0 \in \mathbb{C} - B$ y escojamos V_0 un entorno de z_0 que no contenga ningún otro punto de B , excepto a z_0 . La ecuación $f(z_0, w) = 0$ tiene entonces d raíces distintas w_1, \dots, w_d . Como $\partial f / \partial z(z_0, w_i) \neq 0$, el teorema de la función inversa nos garantiza entornos abiertos V_i de z_0 y W_i de w_i (abierto en \mathbb{C}^2) tales que $\pi : W_i \cap X \rightarrow V_i$ es un homeomorfismo con inversa holomorfa $\omega_i : V_i \rightarrow W_i \cap X$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todos los W_i son disjuntos por pares. Sea $V_{z_0} = V_0 \cap (\bigcap_{i=1}^d V_i)$ y $U_i = \omega_i(V_{z_0}) \subset W_i$. Es claro que $\pi : X \cap U_i \rightarrow V_{z_0}$ es un homeomorfismo. Como U_i no contiene ningún punto de $\pi^{-1}(B)$ se tiene entonces que $\pi : X^0 \cap U_i \rightarrow V_{z_0}$ es un homeomorfismo. Finalmente, $\pi^{-1}(V_{z_0}) \subset \bigcup_{i=1}^d (X^0 \cap U_i)$, y esta unión tiene que ser toda la preimagen de V_{z_0} bajo π , puesto que si $z \in V_{z_0}$, $\pi^{-1}(z)$ consiste exactamente de d puntos. En consecuencia $\pi^{-1}(V_{z_0}) = \bigcup_{i=1}^d (X^0 \cap U_i)$ lo cual concluye la prueba. ■

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar la existencia de un diagrama conmutativo como en (2.1). Para ello necesitamos primero demostrar que todo espacio recubridor sobre una superficie de Riemann tiene a los sumo una única estructura holomorfa que hace que la proyección sea una

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 33

función holomorfa. Demos primero una definición precisa de compatibilidad entre cartas.

Definición 2.2.19 Sea X una superficie de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ un mapeo recubridor, donde Y es un espacio Hausdorff, segundo contable. Sea $A = \{(U_\alpha, z^\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas para X . Decimos que un sistema de coordenadas locales (U, ϕ) (es decir $U \subset X$ es un abierto y $\phi : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{C}$ un homeomorfismo) es compatible con A si para cada $\alpha \in A$ tal que $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ se da que $z^\alpha \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(U_\alpha \cap U)$ y $\phi \circ (z^\alpha)^{-1}$ es holomorfa en $z^\alpha(U_\alpha \cap U)$.

Proposición 2.2.20 Sea X una superficie de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ un mapeo recubridor, donde Y es un espacio Hausdorff, segundo contable¹. Existe un atlas natural, \mathcal{A} , para Y que hace que p sea holomorfa. Si \mathcal{A}' es otro atlas con esta propiedad, entonces todo par de cartas en \mathcal{A} y \mathcal{A}' son compatibles.

Prueba. Para cada $a \in Y$ sea $b = p(a)$ y escojamos entornos abiertos $V_b \subset X$ y $U_a \subset Y$ tales que $p : U_a \rightarrow V_b$ sea un homeomorfismo. Escogiendo a V_b suficientemente pequeño, podemos suponer que en él están definidas coordenadas $z^b : V_b \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{C}$. Definamos coordenadas locales alrededor de a , $(U_a, \phi_a = z^b \circ p)$ y sea \mathcal{A} el conjunto de todas estas cartas. Este conjunto es un atlas, ya que si $U_a \cap U_{a'} \neq \emptyset$ se tiene que

$$\phi_{a'} \circ \phi_a^{-1} = z^{b'} \circ p \circ p^{-1} \circ (z^b)^{-1} = z^{b'} \circ (z^b)^{-1}$$

que es holomorfa en $\phi_a(U_a \cap U_{a'})$. Por otro lado, como $z^b \circ p \circ \phi_a^{-1}$ es la identidad, se sigue inmediatamente que p es holomorfa.

Finalmente, sean (W_a, ψ^a) coordenadas alrededor de a en \mathcal{A}' . Sean $U'_a = U_a \cap W_a$ y $V'_b = p(U'_a)$. Entonces, si $\tilde{U} = \psi_a(U'_a)$ y $\tilde{V} = z^b(V'_b)$, la función $\tilde{p} = z^b \circ p \circ \psi_a^{-1}$ es holomorfa y biyectiva y por consiguiente un biholomorfismo, por el corolario 2.2.6. Luego $\phi_a \circ \psi_a^{-1} = \tilde{p}$ y $\psi_a \circ \phi_a^{-1} = \tilde{p}^{-1}$ son holomorfas, y por consiguiente las cartas son compatibles.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xleftarrow{\psi_a} & U'_a \\ \tilde{p} \downarrow & \phi_a \swarrow & \downarrow p \\ \tilde{V} & \xleftarrow{z^b} & V'_b \end{array}$$

■

¹Esta condición se satisface automáticamente si la fibra de p es contable.

Discusión 2.2.21 Sea $f(z, w) = w^d + a_1(z)w^{d-1} + \dots + a_d(z)$ una curva irreducible de grado d escrita en forma estándar. Denotemos por X a los ceros de f en C^2 , y por $\pi' : X \rightarrow C$ a la proyección $\pi'(z, w) = z$. El plano C puede ser embebido en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, vía el biholomorfismo $j(z) = [1, z]$, donde j es la inversa de $z^0([a_0, a_1] = a_1/a_0$. Sea $B' = \{z \in C : d_f(z) = 0\}$ el conjunto discriminante de f . Entonces, si $X^0 = X - (\pi')^{-1}(B')$, ya sabemos que la restricción $\pi' : X^0 \rightarrow C - B'$ es un mapeo recubridor. Si B denota el conjunto $j(B') \cup \{p_{\infty}\}$, donde $p_{\infty} = [0, 1]$ es el "punto en infinito de la línea proyectiva", entonces el mapeo

$$\pi = j \circ \pi' : X^0 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - B$$

es también un mapeo recubridor.

Veamos ahora que X^0 y X son espacios conexos.

Teorema 2.2.22 (con la notación anterior) *El conjunto X^0 es una superficie de Riemann conexa y en consecuencia también lo es la curva algebraica X .*

Prueba. Sabemos que $\pi' : X^0 \rightarrow \mathbb{C} - B'$ es un mapeo recubridor. Supongamos que X^0 no es conexo y denotemos por $Y \subsetneq X^0$ a una cualquiera de sus componentes conexas. Un ejercicio elemental muestra que la restricción $\pi'|_Y : Y \rightarrow \mathbb{C} - B'$ es también un mapeo recubridor. Sea p un punto de X^0 que no esté en Y y sea $z' = \pi'(p)$. Entonces es claro que la fibra sobre z' en Y tiene menos de d elementos, ya que p no está en ella. Como B' es finito, $\mathbb{C} - B'$ es conexo, luego la cardinalidad de la fibra en Y sobre cada punto $z_0 \in \mathbb{C} - B'$ es la misma, digamos que $\pi|_Y^{-1}(z_0) = \{w_1, \dots, w_s\}$, con $s < d$, un subconjunto propio de todas las raíces de $f(z_0, w) = 0$ (para las que hemos escogido una numeración fija, en forma arbitraria). En la proposición 2.2.18 vimos que alrededor de $z_0 \in \mathbb{C} - B'$ y de cada w_i existen entornos abiertos y funciones holomorfas $\omega_{z_0, i} : V_{z_0} \rightarrow U_i \cap Y$, ($i = 1, \dots, s$), tales que $f(z, \omega_{z_0, i}(z)) = 0$, para todo $z \in V_{z_0}$. Para cada entero $1 \leq k \leq s$ denotemos por $s_{z_0}^k(z)$ a la k -ésima función simétrica en V_{z_0} es decir,

$$\begin{aligned} s_{z_0}^k : V_{z_0} &\rightarrow U_i \cap Y \\ z &\longmapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s} \omega_{z_0, i_1}(z) \omega_{z_0, i_2}(z) \cdots \omega_{z_0, i_k}(z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Veamos ahora que si $z_0, z_1 \in \mathbb{C} - B'$ son dos puntos tales que $V_{z_0} \cap V_{z_1} \neq \emptyset$, entonces $s_{z_0}^k(z) = s_{z_1}^k(z)$, para todo $z \in V_{z_0} \cap V_{z_1}$. La fibra sobre z es precisamente el conjunto $\{\omega_{z_0, 1}(z), \dots, \omega_{z_0, s}(z)\}$, que obviamente es el mismo

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 35

conjunto, $\{\omega_{z_1,1}(z), \dots, \omega_{z_1,s}(z)\}$, y por consiguiente ambos conjuntos difieren sólo por una permutación en el orden de sus elementos. Como en la sumatoria (2.4) aparecen todos los posibles productos de k factores distintos, es entonces claro que las sumas $s_{z_0}^k(z)$ y $s_{z_1}^k(z)$ tienen que ser iguales.

De lo anterior deducimos que cada s^k es una función holomorfa bien definida en todo $\mathbb{C} - B'$.

Consideremos ahora a Y como un recubrimiento $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - B$, con $B = j(B') \cup \{p_{\infty}\}$, $\pi = j \circ \pi'$, como en la discusión (2.2.21), y veamos que:

Afirmación: cada $s^k \circ z^0$ se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ con a lo sumo un polo en p_{∞} de orden $\leq d$.

Consideremos dos casos:

i) $j(b) = [1, b] \in B$, con $b \in B'$. Veamos que en este caso s^k es acotada en una vecindad de b y por tanto puede extenderse a una función holomorfa en toda una vecindad de b , lo que obviamente implica que $s^k \circ z^0$ también se extiende a una función holomorfa en toda una vecindad de $j(b)$. Por el lema de continuidad de las raíces (2.2.16), existe $\delta > 0$ tal que si $z \neq b$ y $|a_i(z) - a_i(b)| < \delta$, para $i = 1, \dots, d$, entonces las raíces de $f(z, w) = 0$, $(\omega_{z,1}(z), \dots, \omega_{z,d}(z))$, satisfacen

$$|\omega_{z,1}(z) - w_1| < 1, \dots, |\omega_{z,d}(z) - w_d| < 1,$$

para un cierto ordenamiento (w_1, w_2, \dots, w_d) (con posible multiplicidad) de las raíces de

$$f(b, w) = w^d + a_1(b)w^{d-1} + \dots + a_d(b) = 0.$$

En particular, para cada una de las s raíces de $f(z, w) = 0$ en Y se tiene que

$$|\omega_{z,i}(z)| = |\omega_{z,i}(z) - w_i + w_i| \leq 1 + |w_i|, \quad i = 1, \dots, s.$$

Luego para cada producto $\omega_{z,i_1}(z)\omega_{z,i_2}(z)\dots\omega_{z,i_k}(z)$ en (2.4) se tiene que

$$|\omega_{z,i_1}(z)\omega_{z,i_2}(z)\dots\omega_{z,i_k}(z)| \leq \prod_{i=1}^s (1 + |w_i|) = C_b$$

Y en consecuencia $|s^k(z)| \leq \binom{s}{k} C_b$, para todo z en un entorno de b que satisfaga que $|a_i(z) - a_i(b)| < \delta$, para $i = 1, \dots, d$.

ii) $p_{\infty} = [0, 1]$. Veamos que $s^k \circ z^0$ es meromorfa en p_{∞} . Sea $z^1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ las coordenadas en $U_1 = \{[a_0, a_1] : a_1 \neq 0\}$, definidas como $z^1([a_0, a_1]) = a_0/a_1$, y mostremos que

$$z^k[(s^k \circ z^0) \circ (z^1)^{-1}] = z^k s^k(1/z)$$

es acotada en un entorno perforado del cero. Como B' es finito existe un $N > 0$ tal que B' está incluido en un disco alrededor del origen de radio N y por consiguiente para todo $z \in D^*(0, 1/N)$ se tiene que $1/z \notin B'$ y en consecuencia $f(1/z, w) = 0$ tiene d raíces distintas, $(\omega_1(1/z), \dots, \omega_d(1/z))$. Ahora,

$$\begin{aligned} z^d f(1/z, w) &= z^d (w^d + a_1(1/z)w^{d-1} + \dots + a_d(1/z)) \\ &= (zw)^d + za_1(1/z)(zw)^{d-1} + \dots + a_d(1/z)z^d \end{aligned}$$

Si hacemos $a_i^*(z) = z^i a_i(1/z)$, entonces como grado $a_i(z)$ es a lo sumo i , se deduce que $a^*(z)$ es un polinomio en z . Luego $(z\omega_1(1/z), \dots, z\omega_d(1/z))$ son las d raíces distintas del polinomio

$$T^d + a_1^*(z)T^{d-1} + \dots + a_d^*(z) = 0,$$

Nuevamente, por el lema (2.2.16) existe $\delta > 0$ tal que si $|a_i^*(z) - a_i^*(0)| < \delta$, (para $i = 1, \dots, d$), entonces

$$|z\omega_1(1/z) - w_1^*| < 1, \dots, |z\omega_d(1/z) - w_d^*| < 1,$$

donde (w_1^*, \dots, w_d^*) son un cierto ordenamiento de las raíces del polinomio

$$T^d + a_1^*(0)T^{d-1} + \dots + a_d^*(0) = 0.$$

Luego para cada producto $z\omega_{i_1}(1/z)z\omega_{i_2}(1/z) \dots z\omega_{i_k}(1/z)$ se tiene que

$$|z\omega_{i_1}(1/z)z\omega_{i_2}(1/z) \dots z\omega_{i_k}(1/z)| \leq \prod_{i=1}^s (1 + |w_i^*|) = C_0$$

Y en consecuencia $|z^k s^k(1/z)| \leq \binom{s}{k} C_0$, para todo z en un entorno $D^*(0, r)$, tal que $r < \min\{1/N, \varepsilon\}$, y donde ε se escoge de tal forma que $|a_i^*(z) - a_i^*(0)| < \delta$, para $i = 1, \dots, d$, y para todo $0 < |z| < \varepsilon$.

Por la proposición 1.1.10, cada función $s^k = (s^k \circ z^0) \circ (z^0)^{-1}$ es racional, digamos $s^k(z) = c_k(z)/d_k(z)$ para polinomios $c_k(z), d_k(z)$. Como el único posible polo es p_∞ se tiene que $d_k(z)$ tiene que ser un polinomio constante y en consecuencia

$$\begin{aligned} g(z_0, w) &= w^s - s^1(z)w^{s-1} + \dots + (-1)^s s^s(z) \\ &= (w - \omega_{z,1}(z)) \dots (w - \omega_{z,s}(z)) \end{aligned}$$

es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}[z]$. Ahora, este polinomio es un factor de $f(z, w)$, ya que para cada $z_0 \in \mathbb{C} - B'$ fijo las raíces de $g(z_0, w) = 0$

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 37

son raíces de $f(z_0, w) = 0$ y por tanto $\text{Res}(g, f)(z_0) = 0$. Esto fuerza a que $\text{Res}(g, f)$ es el polinomio nulo y por la proposición 2.2.13 g y f tienen un factor común, lo que contradice la irreducibilidad de f .

Como X^0 es conexo, su clausura también lo es. Pero X es la unión de X^0 y un número finito de puntos y por tanto X es la clausura de X^0 , un conjunto conexo. ■

Usando la notación de la discusión 2.2.21 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.23 *Sea X una curva algebraica y $\pi : X^0 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - B$ la proyección definida en (2.2.21). Entonces existe una superficie de Riemann \bar{X} conexa y compacta que contiene a X como subconjunto abierto, una función holomorfa y sobreyectiva $p : \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \subset & \bar{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - B & \subset & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \end{array} \quad (2.5)$$

Más aún, el par (\bar{X}, p) es único, es decir, si (Z, p') es otro par con esta propiedad, existe un biholomorfismo $\phi : \bar{X} \rightarrow Z$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\phi} & Z \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \end{array} \quad (2.6)$$

Prueba. (Existencia) Sea $B = \{q_1, \dots, q_k\}$. Alrededor de cada punto q_i podemos escoger una vecindad U_i para la cual estén definidas coordenadas $z^i : U_i \rightarrow D$, con $z^i(q_i) = 0$, donde D denota el disco abierto unitario y tales que si U_i^0 denota el conjunto $U_i - \{q_i\}$, entonces U_i^0 no contiene ningún punto de B . Escribamos a $\pi^{-1}(U_i^0)$ como la unión disjunta de abiertos conexos V_{ij}^0 ,

$$\pi^{-1}(U_i^0) = V_{i1}^0 \cup \dots \cup V_{im_i}^0. \quad (2.7)$$

De la proposición 2.2.18 se sigue que π restringido a V_{ij}^0 es un mapeo recubridor, y por el teorema 2.1.2, podemos escoger homeomorfismos $\sigma_{ij,1} : D^* \rightarrow U_i^0$, $\sigma_{ij,2} : D^* \rightarrow V_{ij}^0$ (D^* denota el disco perforado) que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} D^* & \xrightarrow{\sigma_{ij,1}} & V_{ij}^0 \\ z^{d_{ij}} \downarrow & & \downarrow \pi \\ D^* & \xrightarrow{\sigma_{ij,2}} & U_i^0 \end{array} \quad (2.8)$$

donde $d_{ij} > 0$ es el grado del mapeo π restringido a V_{ij}^0 . Para cada $i = 1, \dots, k$, escogamos elementos de un conjunto disjunto de \bar{X} , que llamaremos

"puntos adicionales", p_{ij} , $j = 1, \dots, m_i$ y definamos $\overline{X} = X^0 \cup \{p_{ij}\}$. A este conjunto le damos la topología que tiene por base a los abiertos de X^0 y a todos los conjuntos de la forma

$$W_{ij} = \{p_{ij}\} \cup (\pi^{-1}(U'_i) \cap V_{ij}^0), \quad (2.9)$$

para cada abierto $U'_i \subset U_i^0$. Para ver que este conjunto es en efecto un base, basta ver la intersección de dos conjuntos de las forma $W \cup G$, donde W es unión de conjuntos W_{ij} , también es de esta forma. Pero, por un lado la intersección de dos abiertos

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \{p_{ij}\} \cup (\pi^{-1}(U'_i) \cap V_{ij}^0), \\ W_{rs} &= \{p_{rs}\} \cup (\pi^{-1}(U'_r) \cap V_{rs}^0), \end{aligned}$$

es vacía, si $(i, j) \neq (r, s)$ y en caso contrario es igual a un abierto de esta misma forma

$$W'_{ij} = \{p_{ij}\} \cup (\pi^{-1}(U'_i \cap U''_i) \cap V_{ij}^0).$$

Por otro lado, si $G \subset X^0$ es abierto, la intersección $G \cap W_{ij}$ también tiene esta forma, ya que es igual a

$$W''_{ij} = \{p_{ij}\} \cup (\pi^{-1}(U''_i) \cap V_{ij}^0), \text{ con } U''_i = \pi(U'_i \cap G).$$

De lo anterior se sigue entonces que la intersección de dos conjuntos $(G \cup W_{ij})$ y $(G' \cup W_{rs})$ es una unión de un abierto, $G \cap G'$ de X^0 , y W , donde W es a su vez una unión de conjuntos de la forma (2.9) lo cual muestra que este conjunto es en efecto una base.

Definamos p como la extensión natural de π , es decir, $p(p_{ij}) = q_i$ y $p|_{X^0} = \pi$. Si en el diagrama (2.8) extendemos a $\sigma_{ij,1}$ y $\sigma_{ij,2}$ como $\sigma_{ij,1}(0) = p_{ij}$ y $\sigma_{ij,2}(0) = q_i$. Con la topología definida en \overline{X} es fácil verificar que $p|_{V_{ij}}$, donde $V_{ij} = V_{ij}^0 \cup \{p_{ij}\}$, es continua y que σ_1, σ_2 son homeomorfismos.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\sigma_{ij,1}} & V_{ij} \\ z^{d_{ij}} \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{\sigma_{ij,2}} & U_i \end{array}$$

De la definición de p se sigue trivialmente que el diagrama (2.5) conmuta. Por la proposición 2.2.20 existe un atlas \mathcal{A} para X^0 que hace que $p|_{X^0}$ sea haolomorfa, y que por su unicidad es compatible con el atlas de X^0 dado en la proposición (2.2.2). A \mathcal{A} le añadimos todas las cartas de la forma $\sigma_{ij,1}^{-1} : V_{ij} \rightarrow D$. Se verifica fácilmente que estas cartas son compatibles con

2.2. SUPERFICIE DE RIEMANN ASOCIADA A CURVA ALGEBRAICA 39

las de \mathcal{A} y que cada carta añadida restringida a X^0 hace que $p|_{X^0}$ sea holomorfa.

Ahora, X^0 es conexo por el teorema anterior, y su clausura en \overline{X} es precisamente \overline{X} . Luego \overline{X} también es conexo. Veamos que es compacto. Para ello veamos que toda secuencia $\{x_n\}$ en \overline{X} tiene una subsecuencia convergente. Como $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es compacto la secuencia $z_n = p(x_n)$ admite una subsecuencia convergente. Abusando de la notación supongamos que la secuencia misma $\{z_n\}$ converge a un punto $z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Tomemos un entorno alrededor de z , U_z tal que $p^{-1}(U_z) = V_1 \cup \dots \cup V_r$ es una unión disjunta y $p|_{V_i}$ es equivalente al mapeo $z \mapsto z^{d_i}$, para un cierto entero $d_i > 0$. Sea $p^{-1}(z) = \{a_1, \dots, a_r\}$ la fibra sobre z , donde $a_i \in V_i$. Cada fibra $p^{-1}(z_n)$ tiene d_i preimágenes en V_i y por tanto deberá existir un a_k , $1 \leq k \leq r$, que es punto de acumulación de elementos de $p^{-1}(z_n)$ lo cual permite extraer una subsecuencia $\{x_{n_j}\}$ que converge a a_k .

(Unicidad)

Supongamos que (Z, p') es otro par que hace conmutar el diagrama (2.5). Para cada $q_i \in B$ podemos escoger U_i suficientemente pequeño tal que se cumple (2.7) y se da que $(p')^{-1}(U_i) = C_{i1} \cup \dots \cup C_{is_i}$, donde la unión es disjunta y cada C_{ij} es una componente conexa donde p' es equivalente al mapeo $z \mapsto z^{d_{ij}}$. Si $U_i^0 = U_i - \{q_i\}$, se tiene que $C_{ij}^0 = C_{ij} - \{c_{ij}\}$ son las componentes conexas de $(p')^{-1}(U_i^0)$, donde c_{ij} es el único elemento en C_{ij} tal que $p'(c_{ij}) = q_i$. Como (2.5) conmuta se tiene que $V_{ij}^0 = C_{ij}^0$, después de reenumerar las componentes C_{ij} adecuadamente. Definimos $\phi : \overline{X} \rightarrow Z$ como la identidad en X^0 y como $\phi(p_{ij}) = c_{ij}$. Se deja como ejercicio al lector verificar que ϕ es un biholomorfismo que hace conmutar a (2.6). ■

Capítulo 3

Sheaves

Definición 3.0.24 Sea X un espacio topológico. Una *presheaf de grupos abelianos* en X consta de los siguientes datos:

1. Para cada abierto $U \subset X$, un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$.
2. Para cada inclusión $V \subset U$ de abiertos de X , un homomorfismo de grupos abelianos $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ que satisface las siguientes condiciones:
 - $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, y para todo abierto U , ρ_{UU} es el homomorfismo identidad.
 - Si $W \subset V \subset U$ son abiertos, entonces $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$.

Denotaremos una presheaf por $\{\mathcal{F}, \rho_{\bullet}\}$ o simplemente por \mathcal{F} . Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se denominan *secciones de \mathcal{F} en U* , y los de $\mathcal{F}(X)$ *secciones globales*. Llamaremos a los homomorfismos ρ_{VU} *homomorfismos restricción* y escribiremos $s|_V$ en lugar de $\rho_{VU}(s)$, si $s \in \mathcal{F}(U)$. También es común denotar a $\mathcal{F}(U)$ por $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

La *presheaf restricción de \mathcal{F} al abierto U* se define como la presheaf que asigna a cada abierto $V \subset U$ el grupo $\mathcal{F}(V)$, con los mismos homomorfismos restricción de \mathcal{F} , y se denotará por $\mathcal{F}|_U$.

Si cada $\mathcal{F}(U)$ tiene una estructura adicional, por ejemplo de anillo, álgebra, módulo, espacio vectorial, etc., y cada ρ_{VU} es un morfismo en la correspondiente categoría, diremos que \mathcal{F} es una *presheaf de anillos, álgebras, módulos, espacios vectoriales, etc.*

En el lenguaje de categorías y funtores, la definición de presheaf puede expresarse como sigue. Para cualquier espacio topológico definamos la categoría $\mathfrak{Top}(X)$, cuyos objetos son los abiertos de X , y los morfismos las

funciones inclusión. Una presheaf de grupos abelianos es entonces un functor contravariante de $\mathfrak{Top}(X)$ a la categoría \mathcal{A} , de grupos abelianos.

Definición 3.0.25 Una presheaf \mathcal{F} en un espacio topológico X es una sheaf, si para cualquier abierto $U \subset X$ y para cualquier cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de U se satisface la siguiente condición: si $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ es una colección de secciones tales que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, para todo U_α y U_β , existe una única sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$ en cada U_α .

En otras palabras, si las secciones locales en los conjuntos U_α coinciden en las intersecciones, podemos encontrar una única sección en U cuyas restricciones son las secciones dadas. Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ pueden pensarse en forma intuitiva como funciones en U que satisfacen una cierta propiedad de carácter local, como por ejemplo, la continuidad, la diferenciabilidad, la propiedad de ser localmente constante, etc. Sin embargo, no todas las sheaves que aparecen en geometría son sheaves de funciones, aunque, como veremos más adelante, toda sheaf es isomorfa a una cierta sheaf de funciones, con la restricción usual.

Ejemplo 3.0.26 Sea X una superficie de Riemann. Para cada abierto $U \subset X$, sea $A(U)$ el conjunto de las funciones suaves en U , con la restricción usual de funciones. Como ser suave es una propiedad local, se sigue fácilmente que A es una sheaf de anillos en X .

Si X es una superficie de Riemann y $\mathcal{O}(U)$ es el conjunto de las funciones holomorfas en U , la colección $\{\mathcal{O}, \rho_\bullet\}$ es una sheaf, lo cual puede verificarse fácilmente, ya que la propiedad de holomorfía es local. De forma similar $M(U)$, el conjunto de funciones meromorfas en U , es una sheaf con la restricción usual de funciones.

Ejemplo 3.0.27 Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano no trivial. Sea \mathcal{G}_X la presheaf en X , definida por $\mathcal{G}_X(U) = G$, para todo $U \neq \emptyset$ y $\mathcal{G}_X(U) = \{0\}$, si $U = \emptyset$, con homomorfismos restricción $\rho_{VU} = Id_G$, si $\emptyset \neq V \subset U$, y $\rho_{VU} = 0$, si $V = \emptyset$. Supongamos que X contiene un conjunto abierto desconexo U , representado como la unión disjunta de conjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 . Sean $a_1, a_2 \in G$ dos elementos distintos y $s_1 = a_1 \in \mathcal{G}_X(U_1) = G$ y $s_2 = a_2 \in \mathcal{G}_X(U_2) = G$. La condición $s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2}$ se satisface trivialmente, ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Pero, como $a_1 \neq a_2$, no existe ninguna sección $s \in \mathcal{G}_X(U) = G$ tal que $s|_{U_1} = s_1$ y $s|_{U_2} = s_2$. Luego \mathcal{G}_X no es una sheaf.

Si $\mathcal{G}'_X(U)$ es el conjunto de funciones localmente constantes en U con valores en G , y ρ'_{VU} denota la restricción usual de funciones, entonces $\{\mathcal{G}'_X, \rho'_{VU}\}$ es una sheaf, que se acostumbra denotar por G .

Ejemplo 3.0.28 ?? Sea X un espacio topológico y $p \in X$ un punto. Para cada U definimos $C_p(U) = (0)$, si $p \notin U$ y $C_p(U) = \mathbb{C}$, si $p \in U$, y sea ρ_{VU} igual a la identidad, si $C_p(V) \neq (0)$ e igual a la función cero, en caso contrario. Se verifica inmediatamente que C_p es una sheaf de \mathbb{C} -espacios vectoriales, llamada la sheaf *rascacielos* en p .

Definición 3.0.29 Sea \mathcal{F} una presheaf en X y sea $p \in X$. En la unión disjunta $\bigcup_{p \in U} \mathcal{F}(U)$ definimos la siguiente relación de equivalencia: $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ son equivalentes si y sólo si existe un entorno abierto de p , $W \subset U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. La clase de equivalencia de s se denotará por s_p y se denominará el *germen de s en p* . Al conjunto \mathcal{F}_p de clases de equivalencia lo llamaremos el *stalk de la presheaf \mathcal{F} en p* .

El stalk de \mathcal{F} en p tiene estructura natural de grupo abeliano: si s_p y t_p son elementos en \mathcal{F}_p , con $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, tomemos W , cualquier entorno de p contenido en $U \cap V$. Definimos la suma $s_p + t_p$ de s_p y t_p como la clase en \mathcal{F}_p de $\rho_{WU}(s) + \rho_{WV}(t)$. Es claro que esta suma es independiente de los representantes $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, y de las clases s_p y t_p , así como del entorno abierto W .

Notemos también que si \mathcal{F} es una sheaf, entonces una sección s de \mathcal{F} en U está completamente determinada por sus imágenes en los stalks \mathcal{F}_p , para todo $p \in U$. Es decir, dos secciones s y t en U son iguales, si y sólo si $s_p = t_p$, para todo $p \in U$. En efecto, si $s_p = t_p$, para todo $p \in U$, entonces para cada p existe un entorno $U_p \subset U$ tal que $s|_{U_p} = t|_{U_p}$, y como obviamente los U_p cubren a U , se deduce que $s = t$ en $\mathcal{F}(U)$.

Ejemplo 3.0.30 Si X es una superficie de Riemann y $p \in X$ un punto, el stalk de O_p puede identificarse con el conjunto de series con radio de convergencia positivo $\sum a_n z^n$, donde (U, z) son coordenadas locales alrededor de p tales que $z(p) = 0$: si f y g son funciones holomorfas definidas en entornos alrededor de p , entonces, si $f_p = g_p$ implica que f y g coinciden en un entrono de p y por tanto $f \circ z^{-1}$ y $g \circ z^{-1}$ coinciden en un entorno de cero. Luego en cierto disco alrededor del origen, D se cumple que $f \circ z^{-1}$ y $g \circ z^{-1}$ tienen el mismo desarrollo en serie de potencias alrededor del origen $\sum a_n t^n$ y en consecuencia $f(x) = g(x) = \sum a_n z(x)^n$, para todo $x \in z^{-1}(D)$. Es obvio que esta igualdad implica que $f_p = g_p$.

En la categoría de las presheaves en un espacio topológico X la noción de morfismo es la siguiente.

Definición 3.0.31 Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} presheaves en X . Un *morfismo* $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una colección de homomorfismos de grupos abelianos $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, (uno por cada abierto de X), tal que si $V \subset U$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{VU, \mathcal{F}} & & \downarrow \rho_{VU, \mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array} \quad (3.1)$$

donde $\rho_{VU, \mathcal{F}}$ y $\rho_{VU, \mathcal{G}}$ denotan los homomorfismos restricción de \mathcal{F} y \mathcal{G} .

Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son sheaves, φ se denomina un *morfismo*, si lo es como morfismo de presheaves. Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son sheaves de anillos, álgebras, espacios vectoriales, etc., φ se denomina un morfismo de sheaves de anillos, álgebras, espacios vectoriales, etc., si φ_U es un morfismo en la categoría correspondiente.

Los morfismos pueden componerse en forma natural: si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ son morfismos, el morfismo $\psi \circ \varphi$ se define en cada U como $\psi_U \circ \varphi_U$, y es fácil ver que esta composición es asociativa. φ se denomina un *isomorfismo* si existe un morfismo $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$, tal que $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ es el morfismo identidad en \mathcal{G} y \mathcal{F} .

Lo anterior nos muestra que las presheaves (respectivamente, las sheaves) en X forman a su vez una categoría. El conjunto de morfismos de presheaves de \mathcal{F} en \mathcal{G} se denotará por $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y es un grupo abeliano, con la operación $(\varphi + \psi)_U = \varphi_U + \psi_U$.

Proposición 3.0.32 *Un morfismo de presheaves $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce en forma natural un morfismo en los stalks $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$, para cada $p \in X$.*

Prueba. Para cada $p \in X$ definimos $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$, como la función que envía cada germen s_p en \mathcal{F}_p en el germen $(\varphi_U(s))_p$, donde s es cualquier representante de s_p en un entorno abierto U de p . φ_p está bien definido, pues si $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ y $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ tienen el mismo germen en p , entonces por definición existe un abierto $V \subset U_1 \cap U_2$, tal que $s_1|_V = s_2|_V$. Luego $\varphi_V(s_1|_V) = \varphi_V(s_2|_V)$, y por ser φ un morfismo de sheaves, $\varphi_{U_1}(s_1)|_V = \varphi_{U_2}(s_2)|_V$. Por tanto $(\varphi_{U_1}(s_1))_p = (\varphi_{U_2}(s_2))_p$, y en consecuencia el valor de φ_p sobre un germen no depende del representante escogido. Es claro que φ_p es un homomorfismo, por la forma como fue definido. ■

Ejercicio 3.0.33 *Demuestre que todo morfismo de sheaves $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ queda determinado por los morfismos inducidos en los stalks, es decir, si φ, ψ son morfismos de sheaves tales que $\varphi_p = \psi_p$, para cada $p \in X$, entonces $\varphi = \psi$.*

Definición 3.0.34 Una *subsheaf* de una sheaf $\{\mathcal{F}, \rho_\bullet\}$ es una sheaf \mathcal{F}' que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$.
2. Cada homomorfismo restricción $\rho'_{VU} : \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}'(V)$ es igual a la restricción $\rho_{VU}|_{\mathcal{F}'(U)}$.

Se sigue de esta definición que, para todo punto p , el stalk \mathcal{F}'_p es un subgrupo de \mathcal{F}_p .

Definición 3.0.35 Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de presheaves. La presheaf *kernel* de φ , *cokernel* de φ , e *imagen* de φ se define como la presheaf que asigna a cada abierto U los grupos $\ker(\varphi_U)$, $\text{coker } \varphi_U$, e $\text{im}(\varphi_U)$, respectivamente.

Proposición 3.0.36 Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves. La presheaf *kernel* de φ es una subsheaf de \mathcal{F} .

Prueba. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento abierto de U . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \ker(\varphi_U) & \subset & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ker(\varphi_{U_\alpha}) & \subset & \mathcal{F}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_{U_\alpha}} & \mathcal{G}(U_\alpha) \end{array}$$

donde las flechas verticales denotan las funciones restricción correspondientes. Sea $s_\alpha \in \ker(\varphi_{U_\alpha})$, tal que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Como \mathcal{F} es una sheaf existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$. Además, de la conmutatividad del diagrama se sigue que $\varphi_U(s)|_{U_\alpha} = \varphi_{U_\alpha}(s_\alpha) = 0$. Como \mathcal{G} es una sheaf, se tiene que $\varphi_U(s) = 0$, y por consiguiente $s \in \ker(\varphi_U)$. Para demostrar la unicidad de s basta ver que si $s \in \ker(\varphi_U) \subset \mathcal{F}(U)$ es tal que $s|_{U_\alpha} = 0 \in \ker(\varphi_{U_\alpha}) \subset \mathcal{F}(U_\alpha)$, entonces $s = 0$. Pero esto es claro ya que \mathcal{F} es una sheaf. ■

Observación 3.0.37 En general las presheaves cokernel e imagen no son sheaves, como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.0.38 Sea $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ el plano complejo menos el origen, y sean \mathcal{O}_X la sheaf de funciones holomorfas (con la operación suma), y \mathcal{O}_X^*

la sheaf que a cada abierto U le asigna las funciones holomorfas en U que no se anulan en ningún punto de U , con la operación producto. Si

$$\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$$

es el morfismo *exponencial*, definido por $\exp_U : f \mapsto e^f$, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces la presheaf definida como $U \mapsto \text{im}(\exp_U)$, no es sheaf. En efecto, si

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \\ U_2 &= \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \end{aligned}$$

y hacemos $f_1(z) = z$ en U_1 , $f_2(z) = z$ en U_2 , entonces $f_i \in \text{im}(\exp_{U_i})$, ya que U_1 y U_2 son simplemente conexos, y en consecuencia puede definirse en cada uno de ellos una rama \log_i de la función logaritmo, y por consiguiente funciones $g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, $g_i = \log_i(z)$, que satisfacen $\exp(g_i) = f_i$ en U_i . Sin embargo, no existe una función $f \in \text{im}(\exp_{U_1 \cup U_2})$, con $f|_{U_i} = f_i$, ya que esta función sería un logaritmo en X , que, como se demuestra en los cursos elementales de análisis complejo, no puede definirse en \mathbb{C}^* .

La siguiente proposición muestra que siempre existe una sheaf asociada (en forma natural) a una presheaf.

Proposición 3.0.39 *Dada una presheaf \mathcal{F} , existe una sheaf \mathcal{F}^+ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, tal que para cualquier sheaf \mathcal{G} y cualquier morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, existe un único morfismo $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$, que satisface $\varphi = \varphi^+ \circ \theta$. El par (\mathcal{F}^+, θ) es único, salvo isomorfismos. \mathcal{F}^+ es llamada la sheafificación de la presheaf \mathcal{F} .*

Prueba. Comencemos por construir a \mathcal{F}^+ . Para cada abierto $U \subset X$, sea $\mathcal{F}^+(U)$ el conjunto de todas las funciones s^+ de U a la unión disjunta $\bigcup_{p \in U} \mathcal{F}_p$ de los stalks de \mathcal{F} en los puntos de U , tales que:

1. para cada $p \in U$, $s^+(p) \in \mathcal{F}_p$.
2. para cada $p \in U$, existe un entorno V de p , contenido en U , y un elemento $t \in \mathcal{F}(V)$, tal que para todo $q \in V$, $s^+(q) = t_q$.

De la naturaleza local de la definición se sigue fácilmente que \mathcal{F}^+ , con las restricciones naturales, es una sheaf. Sea $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ el morfismo que para cada U envía $s \in \mathcal{F}(U)$ en la función s^+ , definida por $s^+(p) = s_p$. Se ve sin ninguna dificultad que $s^+ \in \mathcal{F}^+(U)$, y que θ es un morfismo de presheaves.

Veamos que se satisface la propiedad universal descrita. Para ello, sea \mathcal{G} una sheaf y $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo. Tomemos $t \in \mathcal{F}^+(U)$. Por la condición 2, existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de U , y elementos $t_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tales que para todo $p \in U_\alpha$, $(t_\alpha)_p = t(p)$. Como $(t_\alpha)_p = (t_\beta)_p$, para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, tenemos que $(\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha))_p = (\varphi_{U_\beta}(t_\beta))_p$, ya que

$$(\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha))_p = \varphi_p((t_\alpha)_p) = \varphi_p((t_\beta)_p) = (\varphi_{U_\beta}(t_\beta))_p.$$

Como \mathcal{G} es una sheaf, se tiene que $\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \varphi_{U_\beta}(t_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, de lo cual se deduce que existe un único $v \in \mathcal{G}(U)$, tal que $\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha) = v|_{U_\alpha}$. Definamos $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ como $\varphi_U^+(t) = v$. Note que si $p \in U$ entonces $p \in U_\alpha$, para algún α y

$$v_p = (v|_{U_\alpha})_p = (\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha))_p = \varphi_p((t_\alpha)_p) = \varphi_p(t(p)).$$

Esto implica que la definición de φ^+ no depende de la colección $\{U_\alpha, t_\alpha\}$ escogida, ya que si $\{U'_\alpha, t'_\alpha\}$ es otra colección, y v' es tal que $v'_p = \varphi_p(t(p))$, entonces $v'_p = v_p$, para todo $p \in U$, de lo cual se deduce que $v' = v$ en $\mathcal{G}(U)$. Queda por probar que si $t = \theta_U(s)$, con $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\varphi_U^+(t) = \varphi_U(s)$. Pero esto se sigue de la definición de φ^+ , tomando el cubrimiento trivial $\{U_1 = U\}$, ya que $\varphi_U^+(t)$ y $\varphi_U(s)$ son ambas iguales a v .

La unicidad de φ^+ se sigue del hecho de que cualquier morfismo con las propiedades de φ^+ coincide localmente con φ . ■

Definición 3.0.40 Si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de sheaves, definimos la *imagen* de φ como la sheafificación de la presheaf imagen de φ y la denotaremos también como $\text{im}(\varphi)$. Definimos el *cokernel* de φ , denotado $\text{coker } \varphi$, como la sheafificación de la presheaf cokernel de φ .

Para cada morfismo de sheaves $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, la propiedad universal de la sheafificación garantiza la existencia de un morfismo $i^+ : \text{im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$, tal que $i^+ \circ \theta = i$, la inclusión de la presheaf $\text{im } \varphi$ en \mathcal{G} .

Definición 3.0.41 Un morfismo de sheaves $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es *inyectivo* si $\ker(\varphi) = 0$, y *sobreyectivo* si $i^+ : \text{im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo. Es costumbre escribir $\text{im}(\varphi) = \mathcal{G}$ cuando se quiere afirmar que φ es sobreyectivo.

Ejercicio 3.0.42 Demuestre que i^+ es inyectivo y por tanto, $\text{im}(\varphi)$ puede identificarse como una subsheaf de \mathcal{G} .

Definición 3.0.43 Diremos que una secuencia de sheaves

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

es *exacta*, si para cada i , $\ker(\varphi^i) = \text{im}(\varphi^{i-1})$.

Lema 3.0.44 Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves. Entonces para cada punto p , $(\ker(\varphi))_p = \ker(\varphi_p)$ e $(\text{im}(\varphi))_p = \text{im}(\varphi_p)$. Más aún,

$$0 \rightarrow (\ker(\varphi))_p \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow (\text{im}(\varphi))_p \rightarrow 0$$

es una secuencia exacta.

Prueba. Se deja como ejercicio. ■

Proposición 3.0.45 Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves en X . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El morfismo φ es inyectivo.
2. El homomorfismo inducido en los stalks, φ_p , es inyectivo, para todo $p \in X$.
3. φ_U es inyectivo, para todo U .

Prueba. 1 \Rightarrow 2. Supongamos que φ es inyectivo. Entonces $\ker(\varphi) = 0$. Por el lema 3.0.44, $\ker(\varphi_p) = (\ker(\varphi))_p = 0$, y por tanto, φ_p es inyectivo.

2 \Rightarrow 3. Supongamos que φ_p es inyectivo, y probemos que φ_U también lo es. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$, y supongamos que $\varphi_U(s) = 0$. Entonces, para todo $p \in U$, la imagen $\varphi_p(s_p) = (\varphi_U(s))_p$ de $\varphi_U(s)$ en el stalk \mathcal{G}_p es 0. Puesto que φ_p es inyectivo para cada p , se sigue que $s_p = 0$ en \mathcal{F}_p para cada $p \in U$. Por tanto, existe un entorno abierto W_p de p , con $W_p \subset U$, tal que $s|_{W_p} = 0$. Como los abiertos W_p forman un cubrimiento de U , y \mathcal{F} es un sheaf, s tiene que ser cero en U , y por tanto, φ_U es inyectivo.

3 \Rightarrow 1. Supongamos que φ_U es inyectivo para todo U . Entonces

$$(\ker \varphi)(U) = \ker \varphi_U = 0,$$

para todo U . Por tanto $\ker(\varphi) = 0$, y en consecuencia φ es inyectivo. ■

Proposición 3.0.46 Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves en X . Entonces φ es un isomorfismo, si y sólo si el homomorfismo inducido en los stalks, φ_p , es un isomorfismo para todo $p \in X$.

Prueba. Si φ es un isomorfismo, es claro que φ_p también lo es.

Recíprocamente, supongamos que φ_p es un isomorfismo para todo $p \in X$. Para probar que φ es un isomorfismo, basta ver que $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo, para todo U , ya que esto nos permite definir un morfismo ψ , como $\psi_U = \varphi_U^{-1}$, para cada U , el cual es obviamente el inverso de φ .

De la proposición 3.0.45 se sigue que φ_U es inyectivo. Veamos que φ_U es sobreyectivo. Sea s un elemento de $\mathcal{G}(U)$. Para cada $p \in U$, de la sobreyectividad de φ_p se sigue que $\varphi_{U_p}(t(p)) = s|_{U_p}$, para algún $t(p) \in \mathcal{F}(U_p)$. Si p, q son dos puntos cualesquiera de U , se tiene que $t(p)|_{U_p \cap U_q}$ y $t(q)|_{U_p \cap U_q}$ son dos secciones en $\mathcal{F}(U_p \cap U_q)$ que son enviadas en $s|_{U_p \cap U_q}$. Por la inyectividad de φ , estas secciones coinciden, y de los axiomas de sheaf, se deduce que existe una sección $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t|_{U_p} = t(p)$, para cada p . Como $\varphi_U(t)|_{U_p} = s|_{U_p}$, se deduce que $\varphi_U(t) = s$. ■

Proposición 3.0.47 *Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de sheaves en X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. φ es sobreyectivo.
2. El homomorfismo inducido en los stalks, φ_p , es sobreyectivo, para todo $p \in X$.
3. Para todo abierto $U \subset X$, y todo $s \in \mathcal{G}(U)$, existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de U , y elementos $t_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, tales que $\varphi_{U_\alpha}(t_\alpha) = s|_{U_\alpha}$, para todo U_α .

Prueba. 1 \Rightarrow 2. Supongamos que φ es sobreyectivo. Entonces $\text{im}(\varphi) = \mathcal{G}$. Por el lema 3.0.44, $\text{im}(\varphi_p) = (\text{im}(\varphi))_p = \mathcal{G}_p$, y por tanto, φ_p es sobreyectivo.

2 \Rightarrow 3. Supongamos que φ_p es sobreyectivo para todo $p \in X$. Fijemos $s \in \mathcal{G}(U)$. Por la sobreyectividad, podemos encontrar $t_p \in \mathcal{F}_p$, tal que $\varphi_p(t_p) = s_p$. Supongamos que t_p es representado por una sección $t(p)$ en un entorno abierto U_p de p . Entonces $\varphi_{U_p}(t(p))$ y $s|_{U_p}$ son dos elementos de $\mathcal{G}(U_p)$, cuyo germen es el mismo, puesto que $(\varphi_{U_p}(t(p)))_p = \varphi_p(t_p) = s_p$. Por tanto, reemplazando U_p por un entorno abierto más pequeño, si fuera necesario, podemos suponer que $\varphi_{U_p}(t(p)) = s|_{U_p}$. Esto proporciona un cubrimiento abierto $\{U_p : p \in U\}$ de U , y secciones $t(p) \in \mathcal{F}(U_p)$ que satisfacen las condiciones requeridas en 3.

3 \Rightarrow 2. Se sigue claramente de las definiciones.

2 \Rightarrow 1. Si se satisface 2, entonces φ_p es sobreyectivo, y por tanto, también lo es i_p^+ , donde $i^+ : \text{im}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$ es el morfismo canónico inducido por la

inclusión de la presheaf $\text{im}(\varphi)$ en \mathcal{G} . Como ya sabemos que este último morfismo es inyectivo, se sigue de la proposición 3.0.46 que i^+ es un isomorfismo. ■

Corolario 3.0.48 *Una secuencia*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

es exacta si y sólo si para cada $p \in X$ la correspondiente secuencia en los stalks

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{F}''_p \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

es exacta.

Prueba. De las proposiciones 3.0.45 y 3.0.47 se sigue que la exactitud en los extremos de (3.2) y (3.3) son afirmaciones equivalentes.

La exactitud de (3.2) en el medio significa que $\text{im}(\varphi) = \ker(\psi)$, y como $(\text{im}(\varphi))_p = \text{im}(\varphi_p)$ y $(\ker(\psi))_p = \ker(\psi_p)$, se sigue que $\text{im}(\varphi_p) = \ker(\psi_p)$, lo cual demuestra la exactitud de (3.3) en el medio.

Para demostrar el recíproco veamos primero que $\text{im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$, lo que equivale a demostrar que para cada abierto U , y $s \in \mathcal{F}'(U)$, el elemento $\psi\varphi(s)$ es cero. Pero en cada $p \in U$, $(\psi\varphi(s))_p = \psi_p\varphi_p(s_p) = 0$, por la exactitud en el medio de (3.3). Como \mathcal{F}'' es una sheaf, se sigue que $\psi\varphi(s)$ es cero. Luego $\varphi : \mathcal{F}' \rightarrow \ker(\psi)$ es un morfismo bien definido. Nuevamente, de la exactitud de (3.3), se sigue que φ es un isomorfismo en los stalks y por la proposición 3.0.46, es entonces un isomorfismo, y en consecuencia $\text{im}(\varphi) = \ker(\psi)$. ■

La siguiente proposición nos muestra que φ puede ser sobreyectivo sin que φ_U lo sea. El morfismo de sheaves exp es sobreyectivo, como se demuestra a continuación, y sin embargo, como se vio en el ejemplo ??,

$$\text{exp}_X : \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X^*(X)$$

no lo es.

Proposición 3.0.49 *Sea $X = \mathbb{C}^*$ y sean \mathcal{O}_X y \mathcal{O}_X^* las sheaves definidas en el ejercicio ??. Entonces la secuencia de sheaves*

$$0 \rightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

es exacta. Aquí $2\pi i\mathbb{Z}$ denota la sheaf de funciones localmente constantes con valores en $2\pi i\mathbb{Z}$ y la flecha de la izquierda denota la inclusión.

Prueba. El único punto no trivial es demostrar que el morfismo de sheaves $\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ es sobreyectivo. De acuerdo con la proposición 3.0.47 basta verificar que para cada $z_0 \in X$ el homomorfismo

$$\exp_{z_0} : \mathcal{O}_{X,z_0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,z_0}^*,$$

es sobreyectivo.

Para cada punto $z_0 \in X$ y cada $e \in \mathcal{O}_{X,z_0}^*$, existe un entorno abierto simplemente conexo U de z_0 tal que e es el germen de una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$. Como $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, es posible construir una función holomorfa $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = \exp(g)$. Basta definir

$$g(z) = w_0 + \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

donde la integral se toma sobre cualquier camino γ contenido en U , que una a z_0 con z , y w_0 es cualquier complejo que satisfaga $\exp(z_0) = f(z_0)$. De aquí se sigue que $\exp_{z_0}(g_{z_0}) = f_{z_0} = e$, y por tanto, \exp_{z_0} es sobreyectivo. ■

Proposición 3.0.50 *Para cada $U \subset X$, el functor $\Gamma(U, -)$, de la categoría de sheaves en X a la categoría de grupos abelianos, es un functor exacto a izquierda. Es decir, si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es una secuencia exacta de sheaves, entonces $0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ es una secuencia exacta de grupos.*

Prueba. Supongamos que la secuencia

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

es exacta. Por el corolario 3.0.48, para cada $p \in X$, la secuencia

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{F}''_p \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

es exacta. Veamos que para cada $U \subset X$,

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \xrightarrow{\varphi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}''), \quad (3.5)$$

es exacta. Como φ es inyectivo, por la proposición 3.0.45, φ_U lo es.

Para demostrar la exactitud en el medio, notemos primero que $\psi_U \circ \varphi_U = (\psi \circ \varphi)_U = 0_U = 0$, lo cual implica que $\text{im}(\varphi_U) \subset \ker(\psi_U)$. Para probar la

otra inclusión, supongamos que $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ es tal que $\psi_U(s) = 0$. Puesto que (3.4) es exacta, $\psi_p(s_p) = (\psi_U(s))_p = 0_p = 0$, y por tanto, podemos encontrar $t_p \in \mathcal{F}'_p$ tal que $\varphi_p(t_p) = s_p$. Supongamos que t_p es representado por una sección $t(p)$ en un entorno abierto U_p de p . Como \mathcal{F} es una sheaf, existe una sección $t \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tal que $t|_{U_p} = t(p)$, para cada p , y $\varphi_U(t) = s$. Luego $s \in \text{im}(\varphi_U)$, y por tanto, $\ker(\psi_U) \subset \text{im}(\varphi_U)$. ■

Sea \mathcal{F}' una subsheaf de la sheaf \mathcal{F} . Para cada abierto U definamos

$$\mathcal{H}(U) = \mathcal{F}(U) / \mathcal{F}'(U),$$

y $\rho_{VU, \mathcal{H}}$, como el homomorfismo inducido en el cociente por $\rho_{VU, \mathcal{F}}$. Denotemos por $L_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ al homomorfismo canónico al cociente, y por $[s]$ a $L_U(s)$. Entonces, para $V \subset U$ se tiene que $\rho_{VU, \mathcal{H}}([s]) = [\rho_{VU, \mathcal{F}}(s)] = [s|_V]$, para cada $[s] \in \mathcal{H}(U)$. El homomorfismo $\rho_{VU, \mathcal{H}}$ está bien definido, ya que si $[s_1] = [s_2]$, entonces $s_1 - s_2 \in \mathcal{F}'(U)$ y por tanto, $(s_1 - s_2)|_V \in \mathcal{F}'(V)$. Luego $[s_1|_V] = [s_2|_V]$ y, en consecuencia, $\{\mathcal{H}, \rho_{VU, \mathcal{H}}\}$ es una presheaf de grupos abelianos.

Definición 3.0.51 La *sheaf cociente* \mathcal{F}/\mathcal{F}' es la sheafificación de la presheaf \mathcal{H} .

Capítulo 4

Cohomología de sheaves

4.1. Preliminares

Definición 4.1.1 Un conjunto I , dotado de un orden parcial \leq , con la propiedad de que para cada par de índices $i, j \in I$, existe un entero $k \in I$, con $i, j \leq k$, se denomina un *conjunto dirigido*.

Sean R , un anillo conmutativo con elemento identidad y $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R -módulos, indizada por I . Supongamos que para cualquier $i, j \in I$, con $i \leq j$, existe un R -homomorfismo $f_{ji} : M_i \rightarrow M_j$, que satisface las siguientes dos condiciones:

1. f_{ii} es la función identidad de M_i .
2. Para $i, j \leq k$, $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$.

El conjunto de módulos y R -homomorfismos $\{M_i, f_{ji}\}_{i,j \in I}$ se denomina un *sistema dirigido*.

Sobre la unión disjunta $\bigcup_{i \in I} M_i$ ¹ definamos la siguiente relación de equivalencia: dos elementos $v_i \in M_i$ y $v_j \in M_j$ son equivalentes si y sólo si existe un entero k tal que $i, j \leq k$, y $f_{ki}(v_i) = f_{kj}(v_j)$. El conjunto de clases de equivalencia, que denotaremos por

$$\varinjlim M_i = \{[v_i] : v_i \in M_i, i \in I\},$$

¹Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los conjuntos M_i son disjuntos. Si no fuese así, podríamos reemplazar cada M_i por el producto $M_i \times \{i\}$, y dotar cada “nueva copia” con la misma estructura de R -módulo de M_i .

tiene estructura natural de R -módulo, donde la acción de R se define como $r \cdot [v_i] = [r \cdot v_i]$, y la suma de dos elementos $[v_i], [v_j] \in \varinjlim M_i$ como

$$[v_i] + [v_j] = [f_{ki}(v_i) + f_{kj}(v_j)],$$

con $k \in I$ un índice cualquiera, tal que $i, j \leq k$. Es fácil ver que estas operaciones están bien definidas y que dotan a $\varinjlim M_i$ de estructura de R -módulo, llamado el *límite directo* del sistema dirigido $\{M_i, f_{ji}\}_{i,j \in I}$.

Para cada M_i hay un homomorfismo natural de R -módulos

$$f_i : M_i \rightarrow \varinjlim M_i,$$

que envía a v_i en su clase de equivalencia $[v_i]$. Estos homomorfismos satisfacen $f_j \circ f_{ji} = f_i$.

El límite directo, $\{\varinjlim M_i, f_i\}$, satisface la siguiente *propiedad universal* (y por tanto, es un objeto unívocamente determinado, salvo isomorfismos): dado un R -módulo W y una familia de R -homomorfismos $h_i : M_i \rightarrow W$ que satisfacen $h_j \circ f_{ji} = h_i$, para todo $i \leq j$, existe un único R -homomorfismo $h : \varinjlim M_i \rightarrow W$, tal que $h_i = h \circ f_i$, para todo i .

Ejercicio 4.1.2 Demuestre que $\{\varinjlim M_i, f_i\}$ satisface la propiedad universal enunciada en el párrafo anterior.

Un morfismo entre sistemas dirigidos, $\{A_i, a_{ji}\}_{i,j \in I}$ y $\{B_i, b_{ji}\}_{i,j \in I}$ (sobre el mismo conjunto indizante I) es una colección de R -homomorfismos $h = \{h_i : i \in I\}$, con $h_i : A_i \rightarrow B_i$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{h_i} & B_i \\ \downarrow a_{ji} & & \downarrow b_{ji} \\ A_j & \xrightarrow{h_j} & B_j \end{array} \quad (4.1)$$

Un morfismo h induce un homomorfismo (que también denotaremos por h) $h : \varinjlim A_i \rightarrow \varinjlim B_i$, que envía $[v_i]$ en $[h_i(v_i)]$. Esta función está bien definida, ya que si $[v_i] = [v_j]$, entonces $v_j = a_{ji}v_i$, y por la conmutatividad de (4.1) se tiene que $h_j(v_j) = b_{ji}(h_i(v_i))$, y por tanto, $[h_i(v_i)] = [h_j(v_j)]$.

Una secuencia de sistemas dirigidos

$$0 \rightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \rightarrow 0$$

se llama *exacta*, si la correspondiente secuencia de R -módulos es exacta para cada i .

Proposición 4.1.3 *Si*

$$0 \rightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \rightarrow 0$$

es una secuencia exacta de sistemas dirigidos de R -módulos, entonces

$$0 \rightarrow \varinjlim A_i \xrightarrow{f} \varinjlim B_i \xrightarrow{g} \varinjlim C_i \rightarrow 0$$

es exacta.

Ejercicio 4.1.4 *Demuestre la proposición anterior.*

Ejemplo 4.1.5 Supongamos que $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i \in I}$ es una colección de submódulos de un R -módulo M tal que si N_i y N_j están en \mathcal{N} , existe un N_k en la colección, con $N_i, N_j \subset N_k$. Dotemos a I del orden parcial $i \leq j$, si $N_i \subset N_j$. La condición anterior implica que I es dirigido. Si $i \leq j$, definamos $\tau_{ji} : N_i \subset N_j$ como la inclusión de N_i en N_j . Claramente, $\{N_i, \tau_{ji}\}_{i \in I}$ es un sistema dirigido. El límite directo de este conjunto se denomina la *unión directa de los submódulos N_i* , y puede identificarse naturalmente con un submódulo de M que contiene a todos los N_i .

Ejemplo 4.1.6 Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Denotemos por E_p al conjunto de todos los entornos abiertos de p . Si U y V son entornos, definamos $U \leq V$, si $V \subset U$. Es claro que E_p , con esta relación de orden, es un conjunto dirigido. Para cada $U \in E_p$, sea $\mathcal{C}^0(U)$ el conjunto de funciones continuas con valores reales en U , y si $U \leq V$, denotemos por

$$\begin{aligned} \rho_{VU} : \mathcal{C}^0(U) &\rightarrow \mathcal{C}^0(V) \\ f &\mapsto f|_V, \end{aligned}$$

la función que envía a $f \in \mathcal{C}^0(U)$ en su restricción a V . El límite directo,

$$\mathcal{C}_p^0 = \varinjlim_{U \in E_p} \mathcal{C}^0(U),$$

se denomina el conjunto de *gérmenes de funciones continuas* en el punto p , y, a la clase de cada $f \in \mathcal{C}^0(U)$, el *germen de la función f en p* , que se denotará por f_p . Notemos que dos clases de equivalencia f_p y g_p , donde $f \in \mathcal{C}^0(U)$ y $g \in \mathcal{C}^0(V)$ son iguales si y sólo si existe un entorno abierto de p , $W \subset U \cap V$, tal que $f|_W = g|_W$.

4.1.1. δ -Functores

Recordemos que si A y B son sheaves y $f : A \rightarrow B$ es un morfismo, entonces $f_X : A(X) \rightarrow B(X)$, que denotaremos por Γf , es un homomorfismo de grupos. Si f es el morfismo identidad, Γf es el homomorfismo identidad, y si $g : B \rightarrow C$ es otro morfismo, entonces $\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$. Si denotamos las secciones globales de una sheaf E por ΓE , las propiedades anteriores muestran que Γ es un *functor covariante de la categoría de sheaves en X , $Sh(X)$, a la categoría de grupos abelianos \mathcal{A}* . Si

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

es una secuencia exacta de sheaves, entonces la secuencia

$$0 \rightarrow \Gamma A \xrightarrow{\Gamma f} \Gamma B \xrightarrow{\Gamma g} \Gamma C$$

es exacta y por tanto, Γ es un *functor exacto a izquierda*.

Nos proponemos construir una colección de funtores $T = \{T^n\}_{n \geq 0}$, de $Sh(X)$ en \mathcal{A} , con las siguientes propiedades:

1. Para cada secuencia exacta corta (4.2) existen *homomorfismos conexión* $\delta^n : T^n C \rightarrow T^{n+1} A$, $n \geq 0$, tales que la secuencia larga

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow T^0 A \xrightarrow{T^0 f} T^0 B \xrightarrow{T^0 g} T^0 C \xrightarrow{\delta^0} T^1 A \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T^n A \xrightarrow{T^n f} T^n B \xrightarrow{T^n g} T^n C \xrightarrow{\delta^n} T^{n+1} A \rightarrow \dots \end{aligned}$$

es exacta.

2. Si (a, b, c) es un morfismo entre secuencias exactas cortas, es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \rightarrow 0 \\ & & a \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \rightarrow 0 \end{array}$$

entonces los homomorfismos conexión $\delta'^n : T^n C' \rightarrow T^{n+1} A'$ son *naturales*, es decir, cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^n C & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1} A \\ \downarrow T^n c & & \downarrow T^{n+1} a \\ T^n C' & \xrightarrow{\delta'^n} & T^{n+1} A' \end{array}$$

conmuta.

3. T^0 es isomorfo, como functor, a Γ .

Definición 4.1.7 Una colección de funtores $T = \{T^n\}_{n \geq 0}$ que satisfaga las propiedades 1 y 2 se llama un δ -functor. Si además se satisface la tercera propiedad, diremos que T es un δ -functor con componente de grado cero Γ .

4.2. Cohomología de Cech

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ un cubrimiento abierto de X . Para cada $p \geq 0$ denotemos por A_p al conjunto de todas las $(p+1)$ -tuplas $A_p = \{(a_0, \dots, a_p) : a_i \in A\}$, y por $(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_p)$ a la p -tupla que se obtiene suprimiendo a_i . Para cada $(p+1)$ -tupla en A_p denotaremos a la intersección $U_{a_0} \cap \dots \cap U_{a_p}$ por U_{a_0, \dots, a_p} .

Sea F una sheaf en X y definamos $C^p(\mathcal{U}, F)$ como el conjunto

$$C^p(\mathcal{U}, F) = \{\omega : \omega : A_p \rightarrow \bigcup_{(a_0, \dots, a_p) \in A_p} F(U_{a_0, \dots, a_p})\},$$

de todas las funciones de A_p a la unión disjunta de todos los grupos $F(U_{a_0, \dots, a_p})$, tales que $\omega(a_0, \dots, a_p) \in F(U_{a_0, \dots, a_p})$. Para cada $p \geq 0$ definamos $d_{\mathcal{U}}^p : C^p(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, F)$ como la función que envía a $\omega \in C^p(\mathcal{U}, F)$ en $d_{\mathcal{U}}^p \omega$, definida como

$$(d_{\mathcal{U}}^p \omega)(a_0, \dots, a_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_{p+1})|_{U_{a_0, \dots, a_{p+1}}}.$$

Proposición 4.2.1 La colección $C_{\mathcal{U}}^{\bullet} = \{C^p(\mathcal{U}, F), d_{\mathcal{U}}^p\}_{p \geq 0}$ es un complejo de grupos abelianos con homología de grado cero isomorfa a $F(X)$.

Prueba. Se sigue directamente de la definición que $d_{\mathcal{U}}^p$ es un homomorfismo. Por otro lado, si $\omega \in C^p(\mathcal{U}, F)$, entonces, por definición

$$\begin{aligned} (d_{\mathcal{U}}^{p+1} d_{\mathcal{U}}^p \omega)(a_0, \dots, a_{p+2}) &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j (d_{\mathcal{U}}^p \omega)(a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_{p+2}) \\ &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \sum_{i=0, i \neq j}^{p+2} (-1)^{\varepsilon(i)} \omega(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_{p+2})|_{U_{a_0, \dots, a_{p+2}}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\varepsilon(i) = i$, si $0 \leq i < j$ y $\varepsilon(i) = i - 1$, si $i > j$. Por tanto, para cada par de índices distintos i, j el sumando $\omega(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_{p+2})|_{U_{a_0, \dots, a_{p+2}}}$

aparece dos veces con signos opuestos y en consecuencia la suma (4.3) es cero.

Por último, la cero homología es por definición igual a $\ker(d_{\mathcal{U}}^0)$. Pero $\omega \in \ker(d_{\mathcal{U}}^0)$ si y sólo si

$$(d_{\mathcal{U}}^0\omega)(a_0, a_1) = \omega(a_1)|_{U_{a_0, a_1}} - \omega(a_0)|_{U_{a_0, a_1}} = 0,$$

es decir si $\omega(a_0)$ y $\omega(a_1)$ coinciden en $U_{a_0} \cap U_{a_1}$, para todo $(a_0, a_1) \in A_1$. Como F es una sheaf, la colección $\{\omega(a_i)\}$ determina una única sección $t \in F(X)$, tal que $t|_{U_i} = \omega(a_i)$. Por tanto $H_0(C^\bullet(\mathcal{U}, F))$ puede identificarse naturalmente con la secciones globales de F , es decir, con $F(X)$. ■

A la homología n -ésima del complejo $C_{\mathcal{U}}^\bullet$ la denotaremos por $H^n(\mathcal{U}, F)$, y se llamará el n -ésimo grupo de cohomología de Čech, relativo al cubrimiento \mathcal{U} .

Sea $\mathcal{V} = \{V_b\}_{b \in B}$ un cubrimiento abierto de M que sea un refinamiento de \mathcal{U} , y sea $\phi : B \rightarrow A$ una función de escogencia para este refinamiento, es decir, una función tal que $V_b \subset U_{\phi(b)}$, para todo $V_b \in \mathcal{V}$. Sea ϕ^p la función

$$\begin{aligned} \phi^p : C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^p(\mathcal{V}, F) \\ \omega &\mapsto \phi^p\omega \end{aligned}$$

definida como

$$\phi^p\omega(b_0, \dots, b_p) = \omega(\phi b_0, \dots, \phi b_p)|_{V_{b_0, \dots, b_p}}. \quad (4.4)$$

Es fácil ver que ϕ^p es un homomorfismo que induce un morfismo de complejos $\phi^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, F)$, y por tanto, un homomorfismo en las homología $\phi^\bullet : H^\bullet(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{V}, F)$.

Ejercicio 4.2.2 Demuestre que $d_{\mathcal{V}}^p \phi^p = \phi^{p+1} d_{\mathcal{U}}^p$, y que por tanto, ϕ^\bullet es un morfismo de complejos.

Sean ϕ y ψ dos funciones de escogencia $\phi, \psi : B \rightarrow A$ para el refinamiento \mathcal{V} . Definamos

$$\begin{aligned} h^p : C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^{p-1}(\mathcal{V}, F) \\ \omega &\mapsto h^p\omega \end{aligned}$$

como la función que envía a ω en $h^p\omega$ definida como

$$h^p\omega(b_0, \dots, b_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \omega(\phi b_0, \dots, \phi b_i, \psi b_i, \dots, \psi b_{p-1})|_{V_{b_0, \dots, b_{p-1}}}. \quad (4.5)$$

Proposición 4.2.3 $h^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{\bullet-1}(\mathcal{V}, F)$ es una homotopía entre los morfismos de complejos ϕ^\bullet y ψ^\bullet . Es decir,

$$\psi^p - \phi^p = d_{\mathcal{V}}^{p-1} h^p + h^{p+1} d_{\mathcal{U}}^p, \quad (4.6)$$

para todo $p \geq 0$ (donde $d_{\mathcal{V}}^{-1}$ se define como 0).

Prueba. Con el propósito de simplificar la notación, suprimamos durante la prueba el símbolo de restricción de secciones, “|”. Sea ω un elemento en $C^p(\mathcal{U}, F)$. Por definición de h^{p+1} tenemos que

$$\begin{aligned} h^{p+1}(d_{\mathcal{U}}^p \omega)(b_0, \dots, b_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i d_{\mathcal{U}}^p \omega(\phi b_0, \dots, \phi b_i, \psi b_i, \dots, \psi b_p) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \omega(a_0^i, \dots, \widehat{a_j^i}, \dots, a_{p+1}^i), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $a_k^i = \phi b_k$, si $0 \leq k \leq i$ y $a_k^i = \psi b_{k-1}$, si $i < k \leq p+1$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}}^{p-1}(h^p \omega)(b_0, \dots, b_p) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j h^p \omega(b_0, \dots, \widehat{b_j}, \dots, b_p) \\ &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \omega(\phi c_0^j, \dots, \phi c_i^j, \psi c_i^j, \dots, \psi c_{p-1}^j), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $c_k^j = b_k$, si $0 \leq k < j$ y $c_k^j = b_{k+1}$, si $j \leq k \leq p-1$. Veamos que cada término de (4.8) aparece en (4.7) con signo opuesto. Distingamos dos casos: si $0 \leq i < j$, el sumando que corresponde a i, j en la suma (4.8) es

$$(-1)^{i+j} \omega(\phi b_0, \dots, \phi b_i, \psi b_i, \dots, \widehat{\psi b_j}, \dots, \psi b_p).$$

Pero este sumando es precisamente el término $i, j+1$ de (4.7), que aparece con signo opuesto (igual a $(-1)^{i+j+1}$). Si $j \leq i \leq p-1$, el sumando de (4.8) que corresponde a i, j es

$$(-1)^{i+j} \omega(\phi b_0, \dots, \widehat{\phi b_j}, \dots, \phi b_{i+1}, \psi b_{i+1}, \dots, \psi b_p),$$

que es igual al término $i+1, j$ de (4.7), que aparece con signo opuesto, igual a $(-1)^{i+j+1}$.

Por consiguiente, en la suma $((d_{\mathcal{V}}^{p-1}h^p + h^{p+1}d_{\mathcal{U}}^p)\omega)(b_0, \dots, b_p)$ sólo aparecen los términos de (4.7) que no están en (4.8) ($2p+2$ en total). Es fácil ver que estos términos son precisamente los que corresponden a los índices i, j con $0 \leq i \leq p$ y $j = i$ o $j = i+1$. Notemos que en la suma (4.7) el sumando que corresponde a $i = 0$ y $j = 0$ es precisamente $\omega(\psi b_0, \dots, \psi b_p)$ y el que corresponde a $i = p$ y $j = p+1$ es igual a $-\omega(\phi b_0, \dots, \phi b_p)$. Los restantes $2p$ sumandos, que corresponden a los índices $0 \leq i < p$, con $j = i$ o $j = i+1$, se cancelan entre sí, ya que cada término $i, j = i+1$, que es igual a

$$(-1)^{2i+1}\omega(\phi b_0, \dots, \phi b_i, \widehat{\psi b_i}, \psi b_{i+1}, \dots, \psi b_p),$$

se cancela con el término $i+1, j = i+1$, que es igual a

$$(-1)^{2i+2}\omega(\phi b_0, \dots, \phi b_i, \widehat{\phi b_{i+1}}, \psi b_{i+1}, \dots, \psi b_p).$$

En consecuencia vemos que

$$((d_{\mathcal{V}}^{p-1}h^p + h^{p+1}d_{\mathcal{U}}^p)\omega)(b_0, \dots, b_p) = \omega(\psi b_0, \dots, \psi b_p) - \omega(\phi b_0, \dots, \phi b_p),$$

y por tanto, (4.6) es cierta. ■

Corolario 4.2.4 *Los homomorfismos inducidos en las homología*

$$\psi^\bullet, \phi^\bullet : H^\bullet(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{V}, F)$$

son iguales, y por tanto, no depende de la función de escogencia para el refinamiento.

Prueba. La demostración es una consecuencia directa de la nota ??, ya que ψ^\bullet y ϕ^\bullet son homotópicos. ■

Al homomorfismo determinado por cualquier función de escogencia entre B y A lo denotaremos por

$$\phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet : H^\bullet(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{V}, F). \quad (4.9)$$

Sea $\mathcal{W} = \{W_c\}_{c \in G}$ un refinamiento de \mathcal{V} , y sea $\tau : G \rightarrow B$ una función de escogencia cualquiera. Es claro que \mathcal{W} es a su vez un refinamiento de \mathcal{U} y que $\phi \circ \tau$ es una función de escogencia de G a A . De (4.4) se sigue que $(\phi \circ \tau)^\bullet = \tau^\bullet \circ \phi^\bullet$, y por tanto, que $(\tau \circ \phi)_{\mathcal{W}, \mathcal{U}}^\bullet = \tau_{\mathcal{W}, \mathcal{V}}^\bullet \circ \phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet$. Definamos en el conjunto de cubrimientos abiertos de X , $\text{Cubr}(X)$, la relación $\mathcal{V} \geq \mathcal{U}$, si \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} . Es fácil ver que esta relación es en efecto una relación de orden parcial en $\text{Cubr}(X)$, y que el conjunto $\{H^\bullet(\mathcal{U}, F), \phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet\}_{\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \text{Cubr}(X)}$ es un sistema dirigido.

Definición 4.2.5 El límite directo $\varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}(X)} \mathbf{H}^n(\mathcal{U}, F)$ se denotará por $\mathbf{H}^n(X, F)$ y se llamará la n -ésima cohomología de Cech con coeficientes en la sheaf F .

Veamos que $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}^n(X, -)\}_{n \geq 0}$ es un δ -functor. En primer lugar, si \mathcal{U} es un cubrimiento abierto cualquiera de X y $f : F \rightarrow G$ es un morfismo de sheaves, definamos

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{U}}^p(f) : C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^p(\mathcal{U}, G) \\ \omega &\mapsto \omega' \end{aligned}$$

donde ω' está dada por

$$\omega'(a_0, \dots, a_p) = f_{U_{a_0, \dots, a_p}} \circ \omega(a_0, \dots, a_p), \quad (4.10)$$

para cada $(a_0, \dots, a_p) \in A_p$. Es fácil verificar que los $c_{\mathcal{U}}^p(f)$ son homomorfismos de grupos que conmutan con el operador $d_{\mathcal{U}}^p$ y por tanto, definen un morfismo de complejos, que induce a su vez un homomorfismo $\mathbf{H}_{\mathcal{U}}^p(f) : \mathbf{H}^p(\mathcal{U}, F) \rightarrow \mathbf{H}^p(\mathcal{U}, G)$. Por otro lado, se sigue de (4.10) que $\mathbf{H}_{\mathcal{U}}^{\bullet}(f)$ conmuta con los homomorfismos $\phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^{\bullet}$ y por tanto, al pasar al límite se inducen homomorfismos $\mathbf{H}^{\bullet} f : \mathbf{H}^{\bullet}(X, F) \rightarrow \mathbf{H}^{\bullet}(X, G)$.

Ejercicio 4.2.6 Verifique las afirmaciones anteriores. Demuestre además que los homomorfismos $\mathbf{H}^{\bullet}(f)$ son functoriales, es decir, que $\mathbf{H}^{\bullet}(g \circ f) = \mathbf{H}^{\bullet} g \circ \mathbf{H}^{\bullet} f$ y que $\mathbf{H}^{\bullet} Id_F = Id_{\mathbf{H}^{\bullet}(X, F)}$.

4.2.1. El δ -functor $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}^n(X, -)\}_{n \geq 0}$

En esta sección mostraremos que $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}^n(X, -)\}_{n \geq 0}$ es un δ -functor, de la categoría de sheaves, a la categoría de grupos abelianos, con $\mathbf{H}^0(X, -)$ isomorfo a $\Gamma(-)$. Sea

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{h} D \rightarrow 0, \quad (4.11)$$

una secuencia exacta de sheaves. Comencemos por construir homomorfismos conexión $\delta^n : \mathbf{H}^n(X, D) \rightarrow \mathbf{H}^{n+1}(X, A)$. La secuencia (4.11) induce una secuencia exacta de grupos abelianos

$$0 \rightarrow C^{\bullet}(\mathcal{U}, A) \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^{\bullet(i)}} C^{\bullet}(\mathcal{U}, B) \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^{\bullet(h)}} C^{\bullet}(\mathcal{U}, D).$$

Denotemos por $\tilde{C}^{\bullet}(\mathcal{U}, D)$ a la imagen $\text{im}(c_{\mathcal{U}}^{\bullet(h)})$. Es claro entonces que la secuencia

$$0 \rightarrow C^{\bullet}(\mathcal{U}, A) \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^{\bullet(i)}} C^{\bullet}(\mathcal{U}, B) \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^{\bullet(h)}} \tilde{C}^{\bullet}(\mathcal{U}, D) \rightarrow 0$$

es exacta. Si \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} , los homomorfismos

$$\phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, A) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, A) \text{ y } \phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, B) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, B)$$

inducen un homomorfismo $\tilde{\phi}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet : \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D) \rightarrow \tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D)$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, A) & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(i)} & C^\bullet(\mathcal{U}, B) & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(h)} & \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D) & \rightarrow & 0 \\ & & \phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet \downarrow & & \tilde{\phi}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet \downarrow & & \\ 0 \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, A) & \xrightarrow{c_{\mathcal{V}}^\bullet(i)} & C^\bullet(\mathcal{V}, B) & \xrightarrow{c_{\mathcal{V}}^\bullet(h)} & \tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (4.12)$$

Por el lema ?? todo morfismo entre secuencias exactas cortas de complejos da origen a un morfismo entre las correspondientes secuencias exactas largas:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(\mathcal{U}, B) & \xrightarrow{H_{\mathcal{U}}^n(h)} & H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{\mathcal{U}}^n} & H^{n+1}(\mathcal{U}, A) & \xrightarrow{H_{\mathcal{U}}^{n+1}(i)} & H^{n+1}(\mathcal{U}, B) \\ & & \downarrow \overline{\phi}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^n & & \downarrow \phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^{n+1} & & \phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^{n+1} \downarrow \\ H^n(\mathcal{V}, B) & \xrightarrow{H_{\mathcal{V}}^n(h)} & H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D)) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{\mathcal{V}}^n} & H^{n+1}(\mathcal{V}, A) & \xrightarrow{H_{\mathcal{V}}^{n+1}(i)} & H^{n+1}(\mathcal{V}, B) \end{array}$$

Pasando al límite directo en cada columna se obtiene una secuencia exacta larga

$$\rightarrow H^n(X, B) \xrightarrow{H^n h} \tilde{H}_n(X, D) \xrightarrow{\tilde{\delta}^n} H^{n+1}(X, A) \xrightarrow{H^{n+1} i} H^{n+1}(X, B) \rightarrow \quad (4.13)$$

donde $\tilde{H}_n(X, D)$ denota el grupo $\varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}(X)} H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D))$. Por otro lado, si

$$\tau_{\mathcal{U}}^\bullet : \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, D)$$

denota la inclusión de complejos, al tomar homología se inducen homomorfismos

$$\overline{\tau}_{\mathcal{U}}^n : H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)) \rightarrow H^n(\mathcal{U}, D). \quad (4.14)$$

Es fácil ver que la restricción de $\phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet$ envía a $\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)$ en $\tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D)$, es decir, que $\phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^\bullet(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)) \subset \tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D)$ y, por consiguiente, cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)) & \xrightarrow{\overline{\tau}_{\mathcal{U}}^n} & H^n(\mathcal{U}, D) \\ \overline{\phi}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^n \downarrow & & \downarrow \phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^n \\ H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D)) & \xrightarrow{\overline{\tau}_{\mathcal{V}}^n} & H^n(\mathcal{V}, D) \end{array}$$

es conmutativo. Si X es *paracompacto* (ver apéndice ??), los homomorfismos $\overline{\tau_{\mathcal{U}}^n}$ inducen, al pasar al límite directo, isomorfismos

$$\tau^n : \widetilde{H}_n(X, D) \rightarrow H^n(X, D),$$

como demostraremos a continuación. Comencemos por probar el siguiente lema.

Lema 4.2.7 *Sea $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ un cubrimiento localmente finito de X , un espacio topológico paracompacto. Entonces, existe un cubrimiento abierto $\mathcal{W} = \{W_a\}_{a \in A}$ tal que $\overline{W}_a \subset U_a$, para cada $a \in A$, y para cada $p \in X$ un entorno abierto V_p con las siguientes propiedades:*

1. Si $p \in U_a$, entonces $V_p \subset U_a$.
2. Si $p \in W_a$, entonces $V_p \subset W_a$.
3. Si $W_a \cap V_p \neq \emptyset$, entonces $V_p \subset U_a$.

Prueba. Por la proposición ?? del apéndice ??, existe un cubrimiento abierto $\mathcal{W} = \{W_a\}_{a \in A}$ de X tal que $\overline{W}_a \subset U_a$, para cada $a \in A$. Para cada $p \in X$, como \mathcal{U} es localmente finito, sólo existen finitos abiertos de \mathcal{U} , $L_p = \{U_{a_1}, \dots, U_{a_N}\}$ que contienen a p . Es claro que los únicos abiertos en \mathcal{W} que pueden contener a p están necesariamente en la lista $\{W_{a_1}, \dots, W_{a_N}\}$, ya que para cada $a \in A$, $W_a \subset \overline{W}_a \subset U_a$. Sean W_{a_1}, \dots, W_{a_r} aquellos abiertos que contienen a p . Tomemos un entorno abierto V_p^1 de p tal que

$$V_p^1 \subset W_{a_{i_1}} \cap \dots \cap W_{a_{i_r}} \cap U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_N}. \quad (4.15)$$

Es claro que para este entorno se satisfacen las condiciones 1 y 2. Notemos ahora que si \widetilde{V}_p es cualquier entorno abierto de p contenido en V_p^1 , entonces las condiciones 1 y 2 siguen siendo válidas para \widetilde{V}_p .

Ahora, sea W_a tal que $W_a \cap V_p^1 \neq \emptyset$, y en consecuencia $U_a \cap V_p^1$ es no vacío. Como \mathcal{U} es localmente finito podemos escoger $V_p^2 \subset V_p^1$ tal que V_p^2 sólo interseque finitos abiertos W_a . Sean $S_p = \{W_{a_{j_1}}, \dots, W_{a_{j_m}}\}$ los únicos abiertos en \mathcal{W} tales que $W_{a_{j_k}} \cap V_p^2 \neq \emptyset$. Para cada uno de ellos distingamos dos casos: si para $W_{a_{j_k}}$ se cumple que $p \notin U_{a_{j_k}}$, definamos el abierto $G_{a_{j_k}}$ como el complemento de $\overline{W}_{a_{j_k}}$ (note que $p \in G_{a_{j_k}}$). Si por el contrario, $p \in U_{a_{j_k}}$, entonces $V_p^2 \subset U_{a_{j_k}}$, por la condición 1. Sea $V_p = V_p^2 \cap (\cap_{a_{j_k}} G_{a_{j_k}})$. Como observamos antes, las condiciones 1 y 2 se siguen cumpliendo para V_p . Ahora veamos que se cumple 3: si $W_a \cap V_p \neq \emptyset$, entonces W_a es uno de los abiertos de la lista S_p , digamos $W_a = W_{a_{j_k}}$. No puede ocurrir que $p \notin U_{a_{j_k}}$, ya que $p \in G$. Luego $p \in U_{a_{j_k}}$, y en consecuencia $V_p \subset V_p^2 \subset U_{a_{j_k}}$. ■

Proposición 4.2.8 *Sea X un espacio paracompacto y D una sheaf en X . Entonces las inclusiones (4.14) inducen al pasar al límite directo isomorfismos de grupos abelianos*

$$\tau^n : \tilde{H}_n(X, D) \rightarrow H^n(X, D). \quad (4.16)$$

Prueba. Denotemos por $Q^\bullet(\mathcal{U}, D)$ al cociente $C^\bullet(\mathcal{U}, D)/\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)$ y por π el homomorfismo canónico al cociente. En forma similar a como se procedió en (4.12), se demuestra que el homomorfismo inducido en los cocientes

$$q_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet : Q^\bullet(\mathcal{U}, D) \rightarrow Q^\bullet(\mathcal{V}, D)$$

hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D) & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(\tau)} & C^\bullet(\mathcal{U}, D) & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(\pi)} & Q^\bullet(\mathcal{U}, D) \rightarrow 0 \\ & & \tilde{\phi}_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet \downarrow & & \phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet \downarrow & & q_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^\bullet \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D) & \xrightarrow{c_{\mathcal{V}}^\bullet(\tau)} & C^\bullet(\mathcal{V}, D) & \xrightarrow{c_{\mathcal{V}}^\bullet(\pi)} & Q^\bullet(\mathcal{V}, D) \rightarrow 0 \end{array}$$

Por el lema ??, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n-1}(Q^\bullet(\mathcal{U}, D)) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{\mathcal{U}}^{n-1}} & H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D)) & \xrightarrow{\bar{\tau}_{\mathcal{U}}^n} & H^n(\mathcal{U}, D) & \xrightarrow{\overline{c_{\mathcal{U}}^n(\pi)}} & H_n(Q^\bullet(\mathcal{U}, D)) \\ & & \bar{\phi}_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^n \downarrow & & \phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^n \downarrow & & \bar{q}_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^n \downarrow \\ H_{n-1}(Q^\bullet(\mathcal{V}, D)) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{\mathcal{V}}^{n-1}} & H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{V}, D)) & \xrightarrow{\bar{\tau}_{\mathcal{V}}^n} & H^n(\mathcal{V}, D) & \xrightarrow{\overline{c_{\mathcal{V}}^n(\pi)}} & H_n(Q^\bullet(\mathcal{V}, D)) \end{array}$$

Pasando al límite se obtiene una secuencia exacta larga

$$\begin{array}{c} \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}(X)} H_{n-1}(Q^\bullet(\mathcal{U}, D)) \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n-1}} \tilde{H}_n(X, D) \xrightarrow{\tau^n} H^n(X, D) \rightarrow \\ \xrightarrow{c^n(\pi)} \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}(X)} H_n(Q^\bullet(\mathcal{U}, D)) \end{array}$$

Para ver que τ^n es un isomorfismo basta probar que

$$\varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}(X)} H_n(Q^\bullet(\mathcal{U}, D)) = 0,$$

para todo $n \geq 0$. Mostraremos que si $\omega \in C^n(\mathcal{U}, D)$, entonces existe un refinamiento \mathcal{V} de $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ tal que $\phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^n(\omega) \in \text{im}(c_{\mathcal{U}}^n(h))$. De aquí se seguiría que $\phi_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}^n$ envía la clase de ω en $H_n(Q^\bullet(\mathcal{U}, D))$ en la clase del cero, y por tanto, es cero al pasar al límite.

Como X es paracompacto, pasando a un refinamiento de $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ localmente finito si fuera necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que \mathcal{U} es localmente finito. Sean $\mathcal{W} = \{W_a\}_{a \in A}$ y $\{V_p\}_{p \in X}$ escogidos

como en el lema anterior. Como h es un morfismo sobreyectivo podemos escoger un entorno abierto $V'_p \subset V_p$ tal que para cada $(n+1)$ -tupla (a_0, \dots, a_n) , con $p \in U_{a_0} \cap \dots \cap U_{a_n}$, existen $\eta_{p,a_0,\dots,a_n} \in B(V'_p)$ que cumplen que

$$h_{V'_p}(\eta_{p,a_0,\dots,a_n}) = \omega(a_0, \dots, a_n)|_{V'_p}. \quad (4.17)$$

Esto es posible ya que \mathcal{U} es un cubrimiento localmente finito y en consecuencia p sólo puede estar contenido en finitos abiertos U_a . Definamos \mathcal{V} como el cubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V'_p\}_{p \in X}$. Como $V'_p \subset V_p$ se verifica fácilmente que las condiciones 1,2 y 3 del lema se cumplen para los V'_p , es decir, se cumple que:

1. Si $p \in U_a$ entonces $V'_p \subset U_a$.
2. Si $p \in W_a$, entonces $V'_p \subset W_a$.
3. Si $W_a \cap V'_p \neq \emptyset$, entonces $V'_p \subset U_a$.

Como \mathcal{W} es un cubrimiento abierto de X , para cada $p_i \in X$ podemos escoger un abierto W_{a_i} que lo contenga. De la condición 2 se sigue que $V'_{p_i} \subset W_{a_i}$, y por tanto \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{W} . Sea $\phi : X \rightarrow A$ una función de escogencia para este refinamiento, es decir, $V_{p_i} \subset W_{\phi(p_i)}$. Para cada $(n+1)$ -tupla (p_0, \dots, p_n) , el elemento $\phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^n(\omega)(p_0, \dots, p_n)$ es, por definición, $\omega(a_0, \dots, a_n)|_{V'_{p_0,\dots,p_n}}$. Veamos que existe $\eta_{p_0,\dots,p_n} \in B(V'_{p_0,\dots,p_n})$ tal que

$$h_{V'_{p_0,\dots,p_n}}(\eta_{p_0,\dots,p_n}) = \omega(a_0, \dots, a_n)|_{V'_{p_0,\dots,p_n}},$$

lo que demostraría que $\phi_{\mathcal{V},\mathcal{U}}^n(\omega) = c_{\mathcal{V}}^n(h)(\eta)$, donde η se define como la función $\eta(p_0, \dots, p_n) = \eta_{p_0,\dots,p_n}$. Si $V'_{p_0,\dots,p_n} = \emptyset$ la afirmación se cumple trivialmente. Supongamos que esta intersección es no vacía. Entonces

$$\emptyset \neq V'_{p_0,\dots,p_n} \subset V'_{p_0} \cap V'_{p_k} \subset V'_{p_0} \cap W_{a_k},$$

y por la condición 3, $V'_{p_0} \subset U_{a_k}$, para todo $0 \leq k \leq n$. Por consiguiente, $V'_{p_0} \subset U_{a_0} \cap \dots \cap U_{a_n}$. Sean $\eta_{p_0,a_0,\dots,a_n} \in B(V'_{p_0})$ secciones que cumplen (4.17). Es claro entonces que (4.17) implica en particular que

$$h_{V'_{p_0} \cap \dots \cap V'_{p_n}}(\eta_{p_0,a_0,\dots,a_n}|_{V'_{p_0,\dots,p_n}}) = \omega(a_0, \dots, a_n)|_{V'_{p_0,\dots,p_n}},$$

como queríamos ver. ■

Teorema 4.2.9 Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{h} D \rightarrow 0$ una secuencia exacta de sheaves. Entonces existen homomorfismos conexión

$$\delta^n : H^n(X, D) \rightarrow H^{n+1}(X, A),$$

y una secuencia exacta larga para H

$$\rightarrow H^n(X, B) \xrightarrow{H^n h} H^n(X, D) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X, A) \xrightarrow{H^{n+1} i} H^{n+1}(X, B) \rightarrow \quad (4.18)$$

Prueba. Por la discusión anterior, sabemos que la secuencia (4.13) es exacta, y que existen isomorfismos (4.16) $\tau^n : \tilde{H}_n(X, D) \rightarrow H^n(X, D)$, para cada $n \geq 0$. Definamos $\delta^n = \tilde{\delta}^n \circ (\tau^n)^{-1}$. Claramente el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(X, B) & \xrightarrow{H^n h} & \tilde{H}_n(X, D) & \xrightarrow{\tilde{\delta}^n} & H^{n+1}(X, A) & \xrightarrow{H^{n+1} i} & H^{n+1}(X, B) \\ \downarrow Id_{H^n(X, B)} & & \downarrow \tau^n & & \downarrow Id_{H^{n+1}(X, A)} & & \downarrow Id_{H^{n+1}(X, B)} \\ H^n(X, B) & \xrightarrow{H^n h} & H^n(X, D) & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(X, A) & \xrightarrow{H^{n+1} i} & H^{n+1}(X, B) \end{array} \quad (4.19)$$

conmuta, y como la primera fila es exacta (ya que es precisamente la secuencia (4.13)), la segunda también lo es, es decir, (4.18) es exacta, como queríamos demostrar. ■

Consideremos ahora un morfismo (a, b, c) entre dos secuencias exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{h} & D \rightarrow 0 \\ & & a \downarrow & & b \downarrow & & d \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{h'} & D' \rightarrow 0 \end{array}$$

Para cada cubrimiento abierto \mathcal{U} , este diagrama induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C^\bullet(\mathcal{U}, A) & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(i)} & C^\bullet(\mathcal{U}, B) & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(h)} & \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D) \rightarrow 0 \\ & & c_{\mathcal{U}}^\bullet(a) \downarrow & & c_{\mathcal{U}}^\bullet(b) \downarrow & & \tilde{c}_{\mathcal{U}}^\bullet(d) \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C^\bullet(\mathcal{U}, A') & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(i')} & C^\bullet(\mathcal{U}, B') & \xrightarrow{c_{\mathcal{U}}^\bullet(h')} & \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D') \rightarrow 0 \end{array} \quad (4.20)$$

Aplicando nuevamente el lema ?? y pasando al límite, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(X, B) & \xrightarrow{c^n(h)} & \tilde{H}_n(X, D) & \xrightarrow{\tilde{\delta}^n} & H^{n+1}(X, A) & \xrightarrow{H^{n+1} i} & H^{n+1}(X, B) \\ \downarrow H^n b & & \downarrow c^n(d) & & \downarrow H^{n+1} a & & \downarrow H^{n+1} b \\ H^n(X, B') & \xrightarrow{c^n(h')} & \tilde{H}_n(X, D') & \xrightarrow{\tilde{\delta}^n} & H^{n+1}(X, A') & \xrightarrow{H^{n+1} i'} & H^{n+1}(X, B') \end{array} \quad (4.21)$$

donde hemos denotado a $\varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}(X)} H_n(\tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D'))$ por $\tilde{H}_n(X, D')$, y donde $\delta'^n = \tilde{\delta}'^n(\tau'^n)^{-1}$, $\delta^n = \tilde{\delta}^n(\tau^n)^{-1}$ y τ'^n es el isomorfismo

$$\tau'^n : \tilde{H}_n(X, D') \rightarrow H^n(X, D').$$

Ahora, de la conmutatividad de (4.20), y como τ^\bullet y τ'^\bullet son inclusiones, se sigue fácilmente que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D) & \xrightarrow{\tau^\bullet} & C^\bullet(\mathcal{U}, D) \\ c^\bullet(d) \downarrow & & \downarrow c^\bullet(d) \\ \tilde{C}^\bullet(\mathcal{U}, D') & \xrightarrow{\tau'^\bullet} & C^\bullet(\mathcal{U}, D') \end{array}$$

es conmutativo. Tomando homología y pasando al límite se obtiene la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(X, D) & \xrightarrow{\tau^n} & H^n(X, D) \\ \overline{c^n(d)} \downarrow & & \downarrow H^n d \\ \tilde{H}_n(X, D') & \xrightarrow{\tau'^n} & H^n(X, D') \end{array}$$

es decir, $(H^n d)\tau^n = (\tau'^n)\overline{c^n(d)}$. La conmutatividad del cuadrado central de (4.21) nos dice que $\delta'^n \overline{c^n(d)} = H^{n+1} a \tilde{\delta}'^n$, y como $\delta'^n = \tilde{\delta}'^n(\tau'^n)^{-1}$ y $\delta^n = \tilde{\delta}^n(\tau^n)^{-1}$, vemos que $\delta'^n(\tau'^n)\overline{c^n(d)} = (H^{n+1} a)\delta^n \tau^n$. Pero el lado izquierdo de esta igualdad es igual a $\delta'^n(H^n d)(\tau'^n)$ de cual se deduce que $(H^{n+1} a)\tilde{\delta}'^n = (H^{n+1} a)\delta^n \tau^n$, o en otras palabras, que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, D) & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(X, A) \\ \downarrow H^n d & & \downarrow H^{n+1} a \\ H^n(X, D') & \xrightarrow{\delta'^n} & H^{n+1}(X, A') \end{array}$$

es conmutativo. Esto demuestra que $H = \{H^n(X, -)\}_{n \geq 0}$ es un δ -functor.

Finalmente, la proposición 4.2.1 muestra que $H^0(\mathcal{U}, F) \simeq F(X)$. Tomando el límite directo obtenemos

$$H^0(X, F) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cubr}} H^0(\mathcal{U}, F) \simeq F(X),$$

y es fácil ver que este es un isomorfismo functorial entre $H^0(X, -)$ y Γ .

Ejercicio 4.2.10 Demuestre que $H^0(X, -)$ y $\Gamma(-)$ son isomorfos como funtores.

4.2.2. Cálculo de la cohomología

Definición 4.2.11 Un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de un espacio topológico X se llama un *cubrimiento de Leray* para una sheaf F en X , si $H^k(U_{a_0, \dots, a_n}, F) = 0$, para todo $n \geq 0$ y $k > 0$.

Teorema 4.2.12 Si \mathcal{U} es un cubrimiento de Leray para un espacio para-compacto X , la cohomología de Čech $H^n(X, F)$ puede computarse como $H^n(\mathcal{U}, F)$.

Prueba. Ver C. Cadavid y Vélez J., *Topología y geometría diferenciales en el lenguaje de sheaves 2005*, página 304. ■

Capítulo 5

Teorema de Riemann-Roch

5.1. Formas diferenciales

Sea X una superficie de Riemann, y sea $A = \{(U_\alpha, z^\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas para X . Cada z^α puede verse como una función a \mathbb{R}^2 que denotaremos $z^\alpha = (x^\alpha, y^\alpha)$. Es claro que, como cada $h_{\beta\alpha} = z^\beta \circ (z^\alpha)^{-1}$ es holomorfa, es en particular una función suave (de tipo C^∞) y en consecuencia X es una variedad dos dimensional. Más aún, las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que el jacobiano de $h_{\beta\alpha}$ es, en cada punto, una matriz de la forma $J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, y por consiguiente $\det J = a^2 + b^2 > 0$ (J es claramente no nulo, ya que $h_{\beta\alpha}$ es localmente invertible). De aquí se sigue que X es una 2 variedad orientable.

Denotemos por $t_p(X)$ al tangente de X en $p \in X$. Sean (x, y) coordenadas locales alrededor del punto p . Una base para este espacio está dada por $B_{x,y} = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$, donde $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ denotan los operadores derivación parcial en $p \in X$. Sea $T_p(X) = \mathbb{C} \otimes t_p(X)$ la complexificación de este espacio en p . Además de la base $\mathbb{C} \otimes B_{x,y}$ este espacio posee otra base distinguida, $B_{z,\bar{z}} = \{\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z}\}$, donde estos dos operadores se definen como $\partial/\partial z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ y $\partial/\partial \bar{z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$. El espacio vectorial dual $T_p^*(X)$ tiene en consecuencia dos bases distinguidas $B_{x,y}^* = \{dx, dy\}$ y $B_{z,\bar{z}}^* = \{dz, d\bar{z}\}$. Y el producto exterior $\wedge^2 T_p^*(X)$, bases $\{dx \wedge dy\}$, $\{dz, d\bar{z}\}$.

Observación 5.1.1 1. Un computo simple muestra que una función definida en un abierto $U \subset X$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en U si $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ en U , ya que esta ecuación no es otra cosa que una forma compacta de escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

2. Es inmediato verificar que $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$.

Definición 5.1.2 Una r -forma ($r = 0, 1, 2$) en un abierto $U \subset X$ es una función

$$\omega : U \longrightarrow \cup_{p \in U} \wedge^r T_p^*(X)$$

a la unión disjunta de los espacios $\wedge^r T_p^*(X)$, con $p \in U$, tal que:

1. $\omega(p) \in \wedge^r T_p^*(X)$
2. Para cada $p \in U$ existe un entorno $U_p \subset U$, coordenadas locales (x, y) definidas en U_p y funciones suaves f, g, h tales que $\omega = f dx + g dy$ en U_p , (si $r = 1$), y $\omega = h dx \wedge dy$ en U_p , si $r = 2$.

Si para cada U denotamos las r -formas en U por $A^r(U)$, entonces, con la restricción usual de funciones, $\{E, \rho\}$ es una sheaf de espacios vectoriales complejos, que llamaremos la sheaf de diferenciales en X .

Por definición, A^0 es precisamente la sheaf de funciones suaves definida en el ejemplo 3.0.26.

Notemos que cada $\omega \in A^r(U)$ también puede escribirse localmente como $\omega = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$, si $r = 1$, (respectivamente $\omega = h_1 dz \wedge d\bar{z}$, si $r = 2$). El claro que el suconjunto $A^{1,0}(U)$ de todas las 1-formas en U que admiten localmente la escritura $\omega = f_1 dz$ es un subespacio vectorial de $A^1(U)$, y en consecuencia $\{A^{1,0}, \rho\}$ es una subsheaf de A^1 . En forma similar, $A^{0,1}(U)$, el conjunto de 1-formas que localmente puede escribirse como $\omega = g_1 d\bar{z}$, es un subespacio de $A^1(U)$, y es evidente que $A^1(U) = A^{1,0}(U) + A^{0,1}(U)$. Además, *esta suma es directa*: si localmente $\omega = f dz = g d\bar{z}$ entonces $f(p) dz|_p - g(p) d\bar{z}|_p = 0$ en $T_p^*(X)$. Pero $dz|_p$ y $d\bar{z}|_p$ son linealmente independientes. Por tanto $f(p) = g(p) = 0$, localmente para todo p . Luego $\omega = 0$.

Por otro lado, el suconjunto de todas las 1-formas de $A^{1,0}(U)$ que se pueden escribir localmente como $\omega = f dz$ con f holomorfa, es a su vez un subespacio vectorial, que denotaremos por $\Omega(U)$. Con la restricción usual, $\{\Omega, \rho\}$ es una sheaf en X , llamada la *sheaf de diferenciales holomorfos*.

5.1.1. Derivada exterior de una forma

Sea X una 2-variedad. Entonces existe una única colección $\{d^r : A_X^r \rightarrow A_X^{r+1}\}_{r=0,1}$ de morfismos de sheaves (de espacios vectoriales) que satisface las siguientes propiedades:

1. En cada abierto $U \subset X$, $d_U^0 : A^0(U) \rightarrow A^1(U)$ se define como el operador que envía cada función suave $f \in A^0(U)$ en el 1-diferencial

localmente dado por $d_U^0 f = \partial f / \partial x dx + \partial f / \partial y dy$, o en la base $\{dz, d\bar{z}\}$, dado por $d_U^0 f = \partial f / \partial z dz + \partial f / \partial \bar{z} d\bar{z}$.

2. Para cada abierto U , $d_U^r(\omega + \eta) = d_U^r \omega + d_U^r \eta$, donde $\omega, \eta \in A_X^r(U)$.
3. Para cada abierto U , $r, s \geq 0$, $\omega \in A_X^r(U)$ y $\eta \in A_X^s(U)$ $d_U^{r+s}(\omega \wedge \eta) = d_U^r \omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d_U^s \eta$.
4. Para cada abierto U , $(d_U^{r+1} \circ d_U^r)(\omega) = 0$, para todo $\omega \in A_X^r(U)$ y $r \geq 0$.

Se puede demostrar que en cada abierto $U \subset X$, $d_U^1 : A^1(U) \longrightarrow A^2(U)$ envía cada $\omega \in A^1(U)$, localmente dada por $\omega = f dx + g dy$, en la 2-forma definida localmente como

$$\begin{aligned} d_U^1 \omega &= (\partial f / \partial x dx + \partial f / \partial y dy) \wedge dx + (\partial g / \partial x dx + \partial g / \partial y dy) \wedge dy \\ &= (\partial g / \partial x - \partial f / \partial y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

En la base $\{dz, d\bar{z}\}$, $d_U^1 \omega = (\partial g_1 / \partial z - \partial f_1 / \partial \bar{z}) dz \wedge d\bar{z}$, si $\omega = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$.

El lector puede consultar la demostración de este teorema en (*C. Cadavid y Vélez J., Topología y geometría diferenciales en el lenguaje de sheaves 2005, Capítulo 4*).

Notemos que el operador

$$d_U^0 : A^0(U) \longrightarrow A^1(U) = A^{1,0}(U) \oplus A^{0,1}(U)$$

es la suma de los operadores $d_U^{1,0}, d_U^{0,1}$ definidos localmente por

$$d_U^{1,0}(f) = \partial f / \partial z dz y d_U^{0,1}(f) = \partial f / \partial \bar{z} d\bar{z},$$

y que el kernel de $d_U^{0,1}$ es precisamente $\mathcal{O}(U)$, ya que f es holomorfa sii $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. En forma similar, si $\omega = f_1 dz \in A^{1,0}(U)$, entonces $d_U^1 \omega = (-\partial f_1 / \partial \bar{z}) dz \wedge d\bar{z} = 0$ sii $f_1 \in \mathcal{O}(U)$ y por tanto el kernel de $d_U^1|_{A^{1,0}(U)} = \Omega(U)$.

Proposición 5.1.3 *Las siguientes secuencias de sheaves son exactas:*

1. $0 \longrightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow A^0 \xrightarrow{d^{0,1}} A^{0,1} \longrightarrow 0$
2. $0 \longrightarrow \Omega \hookrightarrow A^{1,0} \xrightarrow{d^1|_{A^{1,0}}} A^2 \longrightarrow 0$

Prueba. Del párrafo anterior se sigue la exactitud, excepto por la sobreyectividad. Pero la sobreyectividad de $d^{1,0}$ y $d^1|_{A^{1,0}}$ es una cuestión local en cada punto $p \in X$. Tomando coordenadas locales (U, z) alrededor de p , tales que $z(p) = 0$ y $z(U) = D$, es disco abierto unitario, el problema de la sobreyectividad de la secuencia 1 se reduce a demostrar que dada una forma $\tilde{f}d\bar{z}$ en D existe h suave en D tal que $\partial h/\partial\bar{z} = \tilde{f}$. Para la secuencia 2, hay que demostrar que si $\tilde{g}dz \wedge d\bar{z} \in A^2(D)$, existe hdz con h suave en D , tal que $(-\partial h/\partial\bar{z})dz \wedge d\bar{z} = \tilde{g}dz \wedge d\bar{z}$, es decir, que $\partial h/\partial\bar{z} = -\tilde{g}$. Ambas afirmaciones se siguen del llamado Lema de Dolbeault. ■

Lema 5.1.4 (Dolbeault) *Si f es suave en el disco unitario abierto D , existe g suave en D tal que $\partial g/\partial\bar{z} = f$.*

Prueba. Ver Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, GTM 81, página 105. ■

Observación 5.1.5 Si $\{(U_\alpha, z^\alpha) : \alpha \in A\}$ es un atlas para X , dar una sección de la sheaf $H^0(X, \Omega)$ en X equivale a dar una colección $\{f_\alpha dz^\alpha\}$ con $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ (f_α holomorfa en U_α) tales que en cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se cumple que $f_\beta dz^\beta = f_\alpha dz^\alpha$. Como $dz^\alpha = \partial z^\alpha/\partial z^\beta dz^\beta$ entonces debe cumplirse que $f_\beta = f_\alpha \partial z^\alpha/\partial z^\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$.

Ejemplo 5.1.6 Calculemos $H^0(\mathbb{P}^1, \Omega)$. Sabemos que \mathbb{P}^1 puede cubrirse con dos cartas (U_0, z^0) y (U_1, z^1) tales que en $U_0 \cap U_1$ se cumple que $z^1 = 1/z^0$. Sea $\omega \in H^0(\mathbb{P}^1, \Omega)$. Localmente $\omega = f dz^0$, con $f \in \mathcal{O}(U_0)$ y $\omega = g dz^1$, con $g \in \mathcal{O}(U_1)$. En $U_0 \cap U_1$ se tiene que

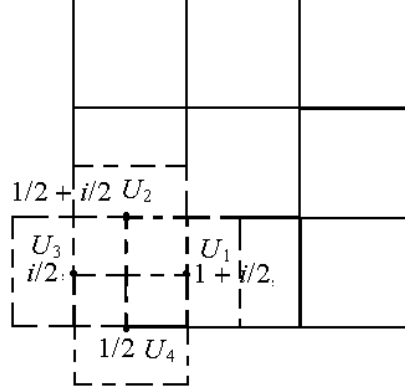
$$g dz^1 = g \partial z^1/\partial z^0 dz^0 = \frac{-1}{(z^0)^2} g = f dz^0$$

De aquí se sigue entonces que $-1/(z^0)^2 g = f$ en $U_0 \cap U_1$. Sean $\tilde{f} = f \circ (z^0)^{-1}$ y $\tilde{g} = g \circ (z^1)^{-1}$. Ahora, $z^0(U_0 \cap U_1) = C^*$ y por tanto, para cada $z \neq 0$ en C se tiene que $-1/(z^2) \tilde{g}(1/z) = \tilde{f}(z)$, con \tilde{f} y \tilde{g} holomorfas en C . Pero esto fuerza necesariamente a que \tilde{g} , y por tanto f , sean las funciones constantes 0.

En conclusión $H^0(\mathbb{P}^1, \Omega) = (0)$.

Ejemplo 5.1.7 Sea $X = \mathbb{C}/\Lambda$, el toro definido mediante la latiz estándar $\Lambda = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}i$, y sea $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ la proyección canónica. Sean U_1, U_2, U_3, U_4

los cuadrados de lado 1 y centro $1+i/2, 1/2+i/2, i/2$ y $1/2$, respectivamente.



Estos cuadrados cubren al cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ y por tanto $V_i = \pi(U_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ es un cubrimiento abierto de X . Definamos coordenadas $z^i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $z^i = z \circ \pi^{-1}$, donde z es la coordenada estándar del plano complejo. Vemos inmediatamente que $z^1 = z^2, z^3 = z^1 - 1, z^4 = z^1, z^4 = z^2 - i$ en cada una de las intersecciones $V_1 \cap V_2, V_1 \cap V_3, V_1 \cap V_4, V_2 \cap V_4$. De aquí que $dz^i/dz^j = 1$ en cada intersección. Dar una 1-forma equivale entonces a dar una colección $f_i dz^i$, con $f_i \in \mathcal{O}(V_i)$ tales que $f_i = f_j$ restringidas a $V_i \cap V_j$, es decir, las f_i definen una función holomorfa global en X y por tanto ha de ser una constante. Luego $H^0(X, \Omega) = \mathbb{C}$.

Ejemplo 5.1.8 Computemos la cohomología $H^1(P^1, \Omega)$. En este caso el complejo de Čech para el cubrimiento U_0, U_1 está dado por

$$0 \rightarrow \Omega(U_0) \oplus \Omega(U_1) \xrightarrow{d} \Omega(U_{01}) \rightarrow 0$$

donde $U_{01} = U_0 \cap U_1$ y $d(\omega_0, \omega_1) = \omega_1|_{U_{01}} - \omega_0|_{U_{01}}$, para 1-formas $\omega_0 = f_0 dz^0, \omega_1 = f_1 dz^1$ en $\Omega(U_0)$ y $\Omega(U_1)$, respectivamente. Así que

$$d(\omega_0, \omega_1) = f_1 dz^1 - f_0 dz^0 = \left(\frac{-1}{(z^0)^2} f_1 - f_0 \right) dz^0 \quad (5.1)$$

restringido a U_{01} . Sean \tilde{f}_i tales que $f_i = \tilde{f}_i \circ z^i$. Como $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, y $z^i(U_i) = \mathbb{C}$, entonces \tilde{f}_i es holomorfa en \mathbb{C} . Sea $\tilde{f}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\tilde{f}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Luego en U_0 podemos escribir $f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^0)^n$, y en U_1 $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z^1)^n$. En U_{01}

se tiene que $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(1/z^0)^n$ y por tanto la función en paréntesis en (5.1) tiene la forma

$$\frac{-1}{(z^0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(1/z^0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^0)^n$$

En consecuencia la imagen de d en $\Omega(U_{01})$ consiste de todas las funciones holomorfas en U_{01} cuyo desarrollo en serie tiene la forma $\sum_{n \neq -1}^{\infty} c_n(z^0)^n$ (sin término $1/z_0$) de lo cual se sigue que $\Omega(U_{01})/im(d) \simeq \mathbb{C}1/z$. Es decir, $H^1(P^1, \Omega) \simeq \mathbb{C}$.

Ejemplo 5.1.9 Si C_p es la sheaf rascacielos en $p \in X$, $H^0(X, C_p) = \mathbb{C}$. Por otro lado, si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de para X , podemos tomar un refinamiento $U' = \{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que sólo uno de los abiertos V_α contenga a $p \in X$: basta fijar U_{α_0} , un abierto cualquiera que contenga a p , y hacer $U'_\alpha = U_\alpha - \{p\}$, $\alpha \neq \alpha_0$. Claramente $C^1(U', C_p) = C_p(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_0})$ y la única componente de $d^1\zeta$ no nula es

$$d^1\zeta(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_0) = \zeta(\alpha_0, \alpha_0) - \zeta(\alpha_0, \alpha_0) + \zeta(\alpha_0, \alpha_0) = \zeta(\alpha_0, \alpha_0).$$

Luego $\zeta \in Ker(d^1)$ sii $\zeta(\alpha_0, \alpha_0) = 0$, y por tanto $H^1(X, C_p) = (0)$.

5.2. Divisores

Definición 5.2.1 Sea X una superficie de Riemann compacta. Un divisor en X es una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $D(p) \neq 0$ solo para finitos $p \in X$. Un divisor puede verse como una suma formal de la forma $D = \sum n_p p$, con $p \in X$ y $n_p = D(p)$. A la suma $\sum n_p$ se le llama el *grado del divisor* y se denotará por $grad(D)$. Se dice que $D \geq 0$ si en cada $p \in X$ se da que $D(p) \geq 0$. En forma análoga se define $D > 0$ y $D \geq D'$, si $D(p) > 0$, para todo $p \in X$ y $D(p) \geq D'(p)$, para todo $p \in X$. La suma de D y D' se define en forma natural como la suma de funciones: $(D + D')(p) = D(p) + D'(p)$. Con esta suma, el conjunto de divisores $Div(X)$ forma un grupo abeliano.

Sea f una función meromorfa en X distinta de cero. *El divisor de f en X* se define de la siguiente manera: para cada punto $p \in X$ tomemos coordenadas locales alrededor de p , (U_p, z) , tales que $z(p) = 0$. En estas coordenadas f puede escribirse como $f = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n$, con $n_0 \neq 0$. *El orden de f en p , que denotaremos por $ord_p(f)$, se define como n_0 .* Si $n_0 > 0$, p se denomina un cero de f de orden n_0 . Y si $n_0 < 0$, p se denomina un polo de

orden $-n_0$. El divisor asociado a f se define como $\text{div}(f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f)p$.

Notemos que esta suma es finita, ya que el número de ceros y polos de f es finito. Si f es la función cero, se define $\text{div}(f)(p) = +\infty$, para todo $p \in X$.

Como vimos en la proposición 1.1.12, toda función meromorfa f en X puede verse como una función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ a la esfera de Riemann. Por el teorema fundamental, la fibra sobre $0 = [1, 0]$ y sobre $\infty = [0, 1]$ consiste de $n = \text{grad}(f)$ preimágenes, contadas con multiplicidad. Pero cada punto en la preimagen de 0 corresponde a un cero de f , contado con su multiplicidad, y similarmente con cada punto en la fibra $f^{-1}(\infty)$. De aquí que $\text{grad}(\text{div}(f)) = n - n - 0$.

Definición 5.2.2 Una 1-forma *meromorfa* en un abierto $U \subset X$ es una función

$$\omega : U \rightarrow \cup_{p \in U} \wedge^r T_p^*(X)$$

a la unión disjunta de los espacios $\wedge^r T_p^*(X)$, con $p \in U$, tal que:

1. $\omega(p) \in \wedge^r T_p^*(X)$
2. Para cada $p \in U$ existe un entorno $U_p \subset U$, coordenadas locales (z, U_p) y una función *meromorfa* f definida en U_p , tal que $\omega = f dz$.

Es claro que la presheaf $U \mapsto M^1(U)$, con la restricción usual de funciones, es una sheaf, llamada la *sheaf de diferenciales meromorfas*, que denotaremos por M^1 .

Observación 5.2.3 Si $\{(U_\alpha, z^\alpha) : \alpha \in A\}$ es un atlas para X , dar una sección de la sheaf $H^0(X, M^1)$ en X equivale a dar una colección $\{f_\alpha dz^\alpha\}$ con $f_\alpha \in M(U_\alpha)$ (f_α meromorfa en U_α) tales que en cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se cumple que $f_\beta dz^\beta = f_\alpha dz^\alpha$. Como $dz^\alpha = \partial z^\alpha / \partial z^\beta dz^\beta$ entonces debe cumplirse que $f_\beta = f_\alpha \partial z^\alpha / \partial z^\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$.

Sea $\omega \in M^1(X)$. Para cada punto $p \in X$ escojamos (U, z^α) coordenadas alrededor de p , en las cuales $\omega = f_\alpha dz^\alpha$, para cierta función meromorfa $f_\alpha \in M(U)$. Denotemos por $\text{ord}_p(\omega)$ al orden de f_α en p . Si (U, z^β) son coordenadas en U en las cuales $\omega = f_\beta dz^\beta$, entonces $f_\alpha = f_\beta (dz^\beta / dz^\alpha)$ en U , y como $(dz^\beta / dz^\alpha)(dz^\alpha / dz^\beta) = 1$ en U , se tiene que $dz^\beta / dz^\alpha \neq 0$ en todo punto de U , y en consecuencia se da que $\text{ord}_p(f_\alpha) = \text{ord}_p(f_\beta)$ y en consecuencia $\text{ord}_p(\omega)$ está bien definido.

Definición 5.2.4 Sea D un divisor en una superficie de Riemann X . Para cada abierto U , sea $\mathcal{O}_X(D)(U)$ el conjunto de todas las funciones meromorfas f en U tales que $\text{div}(f)(p) + D(p) \geq 0$, para todo $p \in U$. Con la restricción usual de funciones $\mathcal{O}_X(D)$ es una sheaf, llamada *la sheaf asociada al divisor D* .

Notemos que $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ si para cada punto $p \in U$ con $D(p) = n \geq 0$, la función f tiene en p un polo de orden a lo sumo n . Si $n < 0$, f debe tener un cero de orden por lo menos n . Por ejemplo, si $U = X$, y $D = 0$, entonces $\mathcal{O}_X(D)(X) = \mathcal{O}(X)$.

Si el grado de D es negativo, determinemos las secciones globales de $\mathcal{O}_X(D)(X)$: si $\text{div}(f)(p) + D(p) \geq 0$, para todo $p \in X$, entonces $\sum \text{div}(f)(p) + \sum D(p) \geq 0$. Pero si $f \neq 0$ se sigue que $\sum \text{div}(f)(p) = 0$ y esto implicaría que $\text{grad}(D) \geq 0$, lo cual es absurdo. Vemos entonces que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = (0)$.

5.3. Teorema de Riemann-Roch

Sea $p \in X$ un punto. Denotemos por P al divisor definido como $P(q) = 1$ si y sólo si $q = p$. Si D es un divisor en X , entonces $\mathcal{O}_X(D)(U) \subset \mathcal{O}_X(D + P)(U)$: si $\text{div}(f) + D \geq 0$ entonces obviamente $\text{div}(f) + D + P \geq 0$. Sean (U_0, z) coordenadas locales alrededor de p tales que $z(p) = 0$. Sea U un abierto arbitrario de X que contiene a p . Si $f \in \mathcal{O}_X(D + P)(U)$ y $D(p) = n_0$, entonces $\text{ord}_p(f) + n_0 + 1 \geq 0$ y por tanto f puede escribirse como

$$f = c_{-(n_0+1)} z^{-(n_0+1)} + \text{términos en } z \text{ de grado mayor.}$$

Si C_p es la sheaf rascacielos en p , definamos $\rho_U : \mathcal{O}_X(D + P)(U) \rightarrow C_p(U)$ como la función cero, si $p \notin U$ y como $\rho_U(f) = c_{-(n_0+1)}$, si $p \in U$. Entonces la secuencia

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X(D + P) \xrightarrow{\rho} C_p \rightarrow 0$$

es exacta, donde i denota la inclusión. La exactitud de los stalks en cualquier $q \neq p$ es clara, ya que $(C_p)_q = (0)$ y $\mathcal{O}_X(D)_q = \mathcal{O}_X(D + P)_q$, ya que en un entorno abierto V de q suficientemente pequeño que no contenga a p $\mathcal{O}_X(D)(V) = \mathcal{O}_X(D + P)(V)$. Por otro lado, la exactitud en p se sigue en el punto medio de la secuencia, ya que si $f_p = c_{-(n_0+1)} z^{-(n_0+1)} + c_{n_0} z^{-n_0} + \dots$ entonces $\rho_p(f_p) = c_{-(n_0+1)} = 0$ si $f_p \in \mathcal{O}_X(D)_p$. La sobreyectividad de ρ_p es clara. De la secuencia exacta de cohomología, y del ejemplo 5.1.9 se sigue

que

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D+P)) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C} \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D+P)) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{sq})$$

es exacta.

Definición 5.3.1 Sea X una superficie de Riemann compacta. A la dimensión del espacio vectorial $H^1(X, \mathcal{O})$ se le denomina el genus (género) de X .

Es un teorema no trivial demostrar que $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O})$ es finita (Ver Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, GTM, página 115).

Teorema 5.3.2 (Riemann-Roch) Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta de genus g . Entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ y $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ son espacios vectoriales de dimensión finita y se cumple que

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \text{grad}(D)$$

Prueba. Veamos primero que el teorema es cierto para $D = 0$. En este caso $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}$ y $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$ y $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$ y la fórmula se satisface trivialmente.

Sea P el divisor de un punto $p \in X$. Veamos que el teorema (RR) se satisface para D si se satisface para $D + P$. La secuencia (??) se puede partir en dos secuencias

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D+P)) \longrightarrow \text{im}(\rho) \longrightarrow 0 \quad ((1))$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}/\text{im}(\rho) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D+P)) \longrightarrow 0 \quad ((2))$$

Si RR es cierto para D entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ y $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ son espacios de dimensión finita. Como $\dim \text{im}(\rho) + \dim(\mathbb{C}/\text{im}(\rho)) = 1$, de la secuencia (1) se ve que

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D+P)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + \dim \text{im}(\rho)$$

Y de la (2) se ve que

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D+P)) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) - \dim(\mathbb{C}/\text{im}(\rho))$$

Luego estos dos espacios son finito dimensionales y obviamente

$$\begin{aligned} & \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D+P)) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D+P)) \\ &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + \dim \operatorname{im}(\rho) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) + \dim(\mathbb{C}/\operatorname{im}(\rho)) \\ &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) + 1 \\ &= 1 - g + \operatorname{grad}(D) + 1 = 1 - g + \operatorname{grad}(D+P). \end{aligned}$$

Un argumento similar demuestra que si RR es cierto para $D+P$ también lo es para D .

■