1. No hay créditos parciales. Las tres partes no están relacionadas.
   Llene las casillas en blanco con F o V en caso que la proposición sea Falsa o Verdadera.
   (a) (2 points) La curva $\mathbf{r}(t) = t^5\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^5\mathbf{k}$, $(t \in \mathbb{R})$, es una línea recta. .... $\boxed{}$

   (b) (2 points) $8e^{-34} \leq \int_1^5 \int_1^3 e^{-(x^2+y^2)}\, dydx \leq 8e^{-2}$ .... $\boxed{}$

Problema 1 continúa en la página siguiente. . .

(c) (2 points) Si $\mathbf{F} = (\sin x, \sin y, -2\sin z)$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. .... $\square$

(d) (2 points) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5$ tiene mínimo local en $(1,2)$. ..... $\square$

(e) (2 points) La ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es $x + y + z = 3$ .... $\square$

2. Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

Considere el siguiente campo vectorial,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y la curva C definida como el segmento de recta que va desde el punto $A(2, 0, 0)$ hasta el punto $B(1, 2, 3)$.

(a) (1 point) Compruebe que $\mathbf{F}$ es irrotacional, es decir compruebe que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) (3 points) Halle un potencial $f(x, y, z)$ (campo escalar) de $\mathbf{F}$ talque $\nabla f = \mathbf{F}$.

R/ $f(x, y, z) =$

Problema 2 continúa en la página siguiente…

(c) (3 points) Complete el enunciado del teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.
Teorema. Sea C una curva suave dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $(a \leq t \leq b)$. Sea f una función diferenciable de dos o tres variables con vector gradiente ∇f continuo en C. Entonces,

(d) (3 points) Calcule,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

R/ $W =$

3. Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

Considere el siguiente campo vectorial,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k},$$

y la superficie S de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el vector normal hacia afuera.

(a) (1 point) Calcule la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

(b) (3 points) Complete el enunciado del teorema de Gauss en general.

Teorema. Sea E una región sólida simple en $\mathbb{R}^3$ y sea S la superficie frontera de E dada con la orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces,

Problema 3 continúa en la página siguiente…

(c) (3 points) Plantee la integral triple, según el teorema de Gauss, cuyo valor es el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S dados. Es decir, usando cualquier tipo de coordenadas (cartesianas, cilíndricas o esféricas), plantee llenando los espacios vacíos la integral triple. No deje nada indicado ni casillas sin llenar.

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, d\boxed{}\, d\boxed{}\, d\boxed{}$$

(d) (3 points) Halle el flujo del campo vectorial dado $\mathbf{F}$ a través de la superficie dada S, es decir calcule,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

R/

4. Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

Considere el sólido E en el primer octante dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, cuya densidad es $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$.

(a) (6 points) Plantee la integral triple que representa la masa de E. Use cualquier tipo de coordenadas.

(b) (4 points) Usando el planteamiento anterior calcule la masa m de E.

Problema 4 continúa en la página siguiente…

R/ $m =$

5. SI SU RESPUESTA Y JUSTIFICACIÓN SON CORRECTAS OBTENDRÁ EL MÁXIMO PUNTAJE. SI SU RESPUESTA ES INCORRECTA PODRÁ OBTENER CRÉDITOS PARCIALES DE ACUERDO A SU JUSTIFICACIÓN.
Considere la siguiente función,

$$f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - xy$$

(a) (1 point) Encuentre los puntos críticos de f.

R/

(b) (3 points) Clasifique los puntos críticos donde la función tiene máximo local, mínimo local o punto de silla.

Problema 5 continúa en la página siguiente...

(c) (6 points) Encuentre los valores α (máximo de f) y β (mínimo de f) que obtiene f en el disco $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

R/

El máximo de f es	y se obtiene en	
El mínimo de f es	y se obtiene en	

Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

1. Considere la función,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

   (a) (5 points) Encuentre todos los puntos críticos de f.

   (b) (5 points) Decida cuál (es) de estos puntos críticos son mínimos o máximos locales o puntos de silla.

Problema 1 continúa en la página siguiente. . .

Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

2. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial,

$$\vec{F} = \left(e^{-y} - ze^{-x}\right)\vec{i} + \left(e^{-z} - xe^{-y}\right)\vec{j} + \left(e^{-x} - ye^{-z}\right)\vec{k}$$

y C la curva que va desde $A(0,0,0)$ hasta $B(1,1,1)$ parametrizada por:

$$x = \frac{1}{\ln 2}\ln(1+t), \quad y = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \quad z = \frac{1-e^t}{1-e}.$$

(a) (3 points) ¿Qué condiciones debe satisfacer $\vec{F}$ para que sea un campo vectorial conservativo?

(b) (3 points) Compruebe que la función $f(x,y,z) = xe^{-y} + ze^{-x} + ye^{-z}$ es una función potencial de $\vec{F}$.

(c) (4 points) Calcule la integral de línea,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Problema 2 continúa en la página siguiente…

Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

3. (10 points) Sea $\vec{F}$ el campo vectorial,

$$\vec{F} = 3y\vec{i} + (5 - 2x)\,\vec{j} + \left(z^2 - 2\right)\vec{k}$$

y Σ es el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (encima del plano $z = 0$). Calcule la integral de superficie,

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

donde $\vec{n}$ es el normal unitario orientado hacia arriba.

Problema 3 continúa en la página siguiente. . .

Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

4. (10 points) Sea $\vec{F}$ el campo vectorial,

$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$$

y S la superficie cerrada y acotada por las superficies del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y del disco en el plano $z = 0$: $x^2 + y^2 \leq 4$ orientada hacia afuera. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de S, es decir calcule,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

Problema 4 continúa en la página siguiente…

No hay créditos parciales. Las cinco partes no están relacionadas.

5. Llene la casilla en blanco con F (Falso) o V (Verdadero), según sea el caso.
   (a) (2 points) La función $f(x,y) = e^{y^2}x^3$ satisface la ecuación diferencial $f_{xxyyyxyxyy} = 0$. . . . . ☐
   (b) (2 points) Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces uno de los vectores es cero. . . . . . . ☐
   (c) (2 points) La parametrización $\vec{r}(\phi,\theta) = (5\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 3\cos\phi)$ con $(\theta,\phi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]$ describe un elipsoide. . . . . ☐
   (d) (2 points) La superficie dada en coordenadas cilíndricas por $\theta = \pi/3$ es medio cono. . . . . ☐
   (e) (2 points) El vector $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$ tiene longitud 1. . . . . ☐

Problema 5 continúa en la página siguiente. . .

Problema 5 continúa en la página siguiente...

Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea. Sea C una curva suave dada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, $(a \leq t \leq b)$. Sea f una función diferenciable de dos o tres variables con vector gradiente ∇f continuo en C. Entonces,

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Teorema de Green. Sea C una curva suave por partes orientada positivamente (contrario a las manecillas del reloj), simple y cerrada en el plano y sea D la región acotada por C. Si $P = P(x, y)$ y $Q = Q(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Teorema de Stokes. Sea S una superficie suave por partes orientada que tiene como borde (frontera) una curva C suave por partes, simple y cerrada con orientación positiva (compatible con la orientación de S). Sea $\vec{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Teorema de Gauss. Sea E una región sólida simple y sea S la superficie que envuelve a E orientada hacia afuera (positiva). Sea $\vec{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a E. Entonces el **flujo** de $\vec{F}$ a través de S es igual a la integral triple de la divergencia sobre E es decir,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV.$$