Álgebra Lineal
Nombre/Código: Agosto 22 2015

Examen I

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA**. Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 $5pts$	
2 $/5pts$	
3 $/5pts$	
4 $/5pts$	
Total: $/20pts$	

Tiempo 1 Hora 20 minutos

1) Sean $u = [1, 2, 4, 0]$ y $v = [2, 3, -2, 1]$.

   (a) **[1 pt]** Calcule las magnitudes de u, v y $u + v$
   (b) **[1 pt]** Decida si u y v son paralelos
   (c) **[1 pt]** Decida si u y v son ortogonales
   (d) **[1 pt]** Calcule el ángulo entre $2u$ y v
   (e) **[1 pt]** Escriba explicitamente la desigualdad del triángulo para los vectors u y v

2) Considere el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & 9y & + & 6z & = & 0 \end{array}$$

   (a) **[1 pt]** Escriba la matriz A tal que $A \cdot [x, y, z]^t = [0, 0, 0]$
   (b) **[2 pts]** Dada A la matriz del punto (i) calcule $B = A^2$ y $3A - 2B^2$
   (c) **[1 pt]** Sea $v = [-3, 1, 0]$. Calcule $A \cdot v^t$
   (d) **[1 pt]** ¿Existen solucione al sistema donde no todos x, y, z son iguales a cero?

3) Sean $M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$, and $b = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) [**1 pt**] Muestre que v es una solución al sistema lineal $M \cdot X = b$

(b) [**2 pts**] Sean v_1, v_2, v_3, v_4 las columnas M. Use (a) para exhibir al vector b como una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4

(c) [**2 pts**] Sea $W = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ¿Pertenece b a W?

4) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(a) [**1 pts**] Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de la matriz A

(b) [**2 pts**] ¿Es la matriz A invertible? En caso que sí encuentre su inversa A^{-1}

(c) [**1 pts**] Encuentre todas la soluciones al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & & + & 5z & = & 0 \end{array}$$

(d) [**1 pts**] ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogeneo asociado al sistema del punto (c)? (Justifique su respuesta)

ÁLGEBRA LINEAL
NOMBRE/CÓDIGO: SEPTIEMBRE 9 2015

Supletorio examen I

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA**. Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 $5pts$	
2 $/5pts$	
3 $/5pts$	
4 $/5pts$	
Total: $/20pts$	

TIEMPO 1 HORA 20 MINUTOS

1) Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

(a) **[1 pt]** Decida si S genera $\mathbb{R}^4$.
(b) **[1 pt]** Decida si S es linealmente independiente.
(c) **[1 pt]** Decida si S es una base para $\mathbb{R}^4$.
(d) **[1 pt]** Encuentre una base para $W = Span(S)$
(e) **[1 pt]** Halle la dimensión de W.

2) Considere el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & 9y & + & 6z & = & 0 \end{array}$$

(a) **[1 pt]** Escriba la matriz A tal que $A \cdot [x, y, z]^t = [0, 0, 0]^t$
(b) **[2 pts]** Dada A la matriz del punto (a) calcule $B = (A^t) \cdot A$ y $C = A + 2B$
(c) **[1 pt]** Sea $v = [-3, 1, 0]$. Calcule $C \cdot v^t$
(d) **[1 pt]** Decida si la matriz C es invertible

3) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \end{bmatrix}$

(a) **[2 pts]** Decida si el vector b pertenece a $\mathrm{Col}(A)$.

(b) **[1 pt]** Considere el sistema de dos ecuaciones con tres incognitas dado por $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b$. ¿Es el sistema consistente?

(c) **[1 pts]** ¿ Cuántas soluciones tiene el sistema $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b$?

(d) **[1 pts]** ¿Tiene el sistema homogeneo asociado a la matriz A una única solución?

4) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(a) **[1 pts]** Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de la matriz A

(b) **[2 pts]** ¿Es la matriz A invertible? En caso que sí encuentre su inversa A^{-1}

(c) **[1 pts]** Encuentre todas la soluciones al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

(d) **[1 pts]** ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogeneo asociado al sistema del punto (c)? (Justifique su respuesta)

Álgebra Lineal, Parcial 1 (versíon 2)
21 de agosto de 2015

Nombre:

Código:

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permiten el uso de notas ni calculadoras. Por favor escriba su nombre en esta hoja y también en las hojas donde se encuentran sus soluciones. Cada ejercicio vale 4 puntos.

1. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre todas las soluciones del sistema no homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre la matriz A^{-1}.

4. Calcule el ángulo entre los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^4$.

5. Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ matrices de 2×2, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = (A + B)\mathbf{v}$.

Álgebra Lineal, Parcial 1 (versíon 1)
21 de agosto de 2015

Nombre:

Código:

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permiten el uso de notas ni calculadoras. Por favor escriba su nombre en esta hoja y también en las hojas donde se encuentran sus soluciones. Cada ejercicio vale 4 puntos.

1. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre todas las soluciones del sistema no homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre la matriz A^{-1}.

4. Calcule el ángulo entre los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^4$.

5. Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ matrices de 2×2, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = (A + B)\mathbf{v}$.

Punto 1.a	Punto 1.b	Punto 1.c	Punto 1.d	Punto 2	Punto 3.a	Punto 3.b	Punto 3.c	Punto 4

Primer Parcial: Algebra lineal. Tema B, 26 de agosto de 2015,

Nombre y apellido	código	Sección	Nota
			/50

Nota:
1. Por favor justificar todas sus respuestas y escribir claro.
2. Contestar en los espacios reservados para las soluciones de los ejercicios.
3. Una hoja sin nombre no se corregirá.
4. sección 27= Jerson 10 a.m., sección 28= Juan Camilo 10 a.m., sección 29= Jerson 12 m., sección 30= Juan Camilo 12 m.

1. [/15] Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, -1)$

   a) [/3] Diga si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son o no perpendiculares. Justifique.

   b) [/4] Si θ es el angulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, encuentre el coseno de θ

   c) [/5] Encontrar un tercer vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ que sea perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$. [Ayuda: Plantear un sistema lineal de 2 ecuaciones en 3 incógnitas y resolverlo!].

   d) [/3] Es el vector $\vec{x}$ que usted encontró en el punto anterior el único vector perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$? o hay más?

2. [/10] Usando las definiciones para la suma y multiplicacin entre matrices, demuestre que si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y tanto B como C son matrices de tamaño $n \times p$, entonces

$$A(B + C) = AB + AC$$

3. [/15] Sean $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) [/5] Diga si $\vec{b} \in Span(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ y en caso afirmativo escribir a $\vec{b}$ como una combinación lineal de $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ y $\vec{w_3}$.

b) [/5] Es $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ una base para $\mathbb{R}^3$? Justificar.

c) [/5] Diga si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

es invertible. Justificar.

4. [/10] Decimos que dos afirmaciones (a) y (b) son equivalentes si vale que (a) implica a (b) y que (b) implica a (a).

   Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y considere la afirmación:

   (a) A es invertible.

   Usando el Álgebra lineal aprendida hasta el momento, dar dos afirmaciones (b) y (c) que sean equivalentes a la afirmación (a) dáda y demostrar alguna de las 6 implicaciones que se tienen. [Ayuda: Analice el punto anterior y recuerde el "teorema de resumen".]

Punto 1.a	Punto 1.b	Punto 1.c	Punto 1.d	Punto 2	Punto 3.a	Punto 3.b	Punto 3.c	Punto 4

Primer Parcial: Algebra lineal. Tema A, 26 de agosto de 2015,

Nombre y apellido	código	Sección	Nota
			/50

Nota:
1. Por favor justificar todas sus respuestas y escribir claro.
2. Contestar en los espacios reservados para las soluciones de los ejercicios.
3. Una hoja sin nombre no se corregirá.
4. sección 27= Jerson 10 a.m., sección 28= Juan Camilo 10 a.m., sección 29= Jerson 12 m., sección 30= Juan Camilo 12 m.

1. [/15] Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -1)$

   a) [/3] Diga si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son o no perpendiculares. Justifique.

   b) [/4] Si θ es el angulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, encuentre el coseno de θ

   c) [/5] Encontrar un tercer vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ que sea perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$. [Ayuda: Plantear un sistema lineal de 2 ecuaciones en 3 incógnitas y resolverlo!].

   d) [/3] Es el vector $\vec{x}$ que usted encontró en el punto anterior el único vector perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$? o hay más?

2. [/10] Usando las definiciones para la suma y multiplicacin entre matrices, demuestre que si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y tanto B como C son matrices de tamaño $n \times p$, entonces

$$A(B+C) = AB + AC$$

3. [/15] Sean $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) [/5] Diga si $\vec{b} \in Span(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ y en caso afirmativo escribir a $\vec{b}$ como una combinación lineal de $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ y $\vec{w_3}$.

b) [/5] Es $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ una base para $\mathbb{R}^3$? Justificar.

c) [/5] Diga si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

es invertible. Justificar.

4. [/10] Decimos que dos afirmaciones (a) y (b) son equivalentes si vale que (a) implica a (b) y que (b) implica a (a).

   Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y considere la afirmación:

   (a) A es invertible.

   Usando el Álgebra lineal aprendida hasta el momento, dar dos afirmaciones (b) y (c) que sean equivalentes a la afirmación (a) dáda y demostrar alguna de las 6 implicaciones que se tienen. [Ayuda: Analice el punto anterior y recuerde el "teorema de resumen".]

Álgebra lineal - MATE 1105
2016-10
Parcial 1
12 de febrero de 2015
Tiempo limite: Una hora y 20 minutos

Nombre: ____________________

Código: ____________________

Profesor ____________________

Este examen contiene 2 páginas y 4 preguntas. El total del puntaje es 18.

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos**.

Tabla de calificación (para uso únicamente del profesor)

Question	Points	Score
1	6	
2	3	
3	4	
4	5	
Total:	18	

1. (6 points) Sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) ¿Existe $D = ABC$? En caso que exista, ¿quién es d_{34}?
   (b) ¿Existe $E = BAC$? En caso que exista, ¿quién es e_{22}?
   (c) ¿Existe $F = BCA$? En caso que exista, ¿quién es f_{43}?
   (d) ¿Existe $G = ACB$? En caso que exista, ¿quién es g_{31}?
   (e) ¿Existe $H = CAB$? En caso que exista, ¿quién es h_{21}?
   (f) ¿Existe $J = CBA$? En caso que exista, ¿quién es j_{13}?

2. (3 points) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{pmatrix}$. Encontrar números c y d de forma tal que $A^2 = 0$.

3. (4 points) (a) (2 points) Encontrar los números b, c, j, k tal que
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-j}{b} = \frac{z-k}{c},$$
es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -1, 4)$ y $(7, 9, 10)$.

(b) (2 points) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0 - 1)$ y es paralela a la recta con ecuación

$$\frac{x-4}{2} = \frac{2y-3}{5} = \frac{3z-7}{6},$$

4. (5 points) (a) (3 points) Encontrar la ecuación normal de plano que paso por los puntos $(0, -1, 1)$, $(1, 0, 2)$ y $(3, 0, 1)$

   (b) (2 points) El ángulo entre dos planos es el ángulo formado por sus vectores normales. Encuentre el ángulo entre los planos $4x - 4z - 16 = 0$ y $-2x + 2y - 13 = 0$.

PARCIAL 1. ALGEBRA LINEAL.

NO se permiten calculadoras, celulares, blackberrys, TV's, hornos microondas, ni ayuda de segundos, terceros, cuartos, etc. Sean honestos (le hace bien al país y a los demás) y buena suerte!

1.[**10 pts**] Considere el siguiente sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & 8 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

a. [**2 pts**] Escríbalo de forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b.[**4 pts**] Escriba la matriz aumentada del sistema. Halle su forma escalonada reducida.

c.[**4 pts**] Escriba la solución general del sistema como suma de una solución particular del sistema y la solución general del sistema homogéneo.

2.[**10 pts**]

a.[**6 pts**] Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0)$.

b.[**4 pts**] Encuentre la distancia del punto $(1, 1, 1)$ al plano cuya ecuación encontró en el punto anterior.

3. [**10 pts**]

a. Sea I la matriz identidad $n \times n$. Muestre que si $AC = I$ y $BA = I$ entonces $B = C$.

b. Sean $\mathbf{v} \neq 0$ y $\mathbf{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonales. Sean s y r escalares. Muestre que si $\mathbf{u} = r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$, entonces

$$r = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Álgebra Lineal, Parcial 1 (versíon 2)
12 de febrero de 2016

Nombre:

Código:

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permiten el uso de notas ni calculadoras. Las calculadoras y los celulares deben ser guardados. Por favor escriba su nombre en esta hoja y también en las hojas donde se encuentran sus soluciones. Cada ejercicio vale 2 puntos.

1. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
   (a) Calcule el vector $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.
   (b) Grafique los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

2. Considere los 3 puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (3, -1, -1)$ y $R = (0, 5, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.
   (a) Encuentre el área del triangulo cuyos vertices son P, Q y R.
   (b) Encuentre la ecuación del plano que contiene P, Q y R.

3. Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(1, 2, -3)$ y $(2, 3, 1)$.
   (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de L.
   (b) ¿La recta L se cruza con el eje x? ¿Por qué o por qué no?

4.
   (a) Encuentre la forma escalonada reducida de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -6 & 12 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

   (b) Encuentre tres soluciones distintas del sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6x_1 & & & - & 6x_3 & + & 12x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

5.
   (a) Para toda matriz A, demuestre que la matriz A^tA es simétrica.
   (b) Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$. Calcule la matriz B^tB.

Primer Parcial: Algebra lineal. Tema A, 18 de Febrero de 2016,

Nombre y apellido	código	Sección	Nota
			/50

Nota:
1. Por favor justificar todas sus respuestas y escribir claro.
2. Contestar en los espacios reservados para las soluciones de los ejercicios.
3. Una hoja sin nombre no se corregirá.
4. sección 12= Mateo Dulce 12 m., sección 13= Edison Lopez 12 m., sección 14= Edison Lopez 9 a.m., sección 15= Daniel Sanchez 9 a.m.

1. [/24] Considere los 3 puntos $P = (1, 2, -1)$, $Q = (1, 3, 0)$ y $R = (1, 3, 1)$ en $\mathbb{R}^3$ (el espacio euclideano tridimensional en el que vivimos!). Sean $\vec{u} = OP$, $\vec{v} = OQ$ y $\vec{w} = OR$ los tres vectores anclados en el origen $O = (0, 0, 0)$ determinados por los puntos dados. [Note que $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 3, 0)$ y $\vec{w} = (1, 3, 1)$]

   a) [/4] Los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 3, 0)$ determinan un paralelogramo en el espacio que tiene como tres de sus vertices a los puntos O, P y Q. Encuentre las coordenadas de S, el cuarto punto de éste paralelogramo.

   b) [/4] Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $R = (1, 3, 1)$ y que es paralelo al plano W donde vive el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 3, 0)$.

   c) [/4] Encuentre la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto $R = (1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano Π.

   d) [/4] Encuentre la distancia entre el punto $R = (1, 3, 1)$ y el plano W [Recuerde: W es el plano determinado pos los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 3, 0)$].

   e) [/4] Encuentre el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 3, 0)$.

   f) [/4] Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 3, 0)$ y $\vec{w} = (1, 3, 1)$.

2. [/16] Sea A la siguiente matriz de 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Ayuda: Antes de resolver los numerales de éste punto, léalos TODOS. Puede ser que con un solo procedimiento pueda resolver varios de éstos!!]

a) [/4] Determine si la matriz A es invertible y en caso afirmativo encontrar su inversa A^{-1}.

b) [/4] Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

c) [/4] Sean $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 3, 0)$ y $\vec{w} = (1, 3, 1)$. Determine si el vector $\vec{b} = (2, 3, -2)$ pertenece a $Span(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$. En caso afirmativo escribir a $\vec{b}$ como una combinación lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$. [Recuerde que $Span(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3\}$].

d) [/4] Diga si TODO vector en $\mathbb{R}^3$ pertenece a $Span(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Justifique su respuesta!!

3. [/10] Sea $W = Span(\vec{u}, \vec{v})$, donde $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 3, 0)$. [Recuerde que $Span(\vec{u}, \vec{v}) = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3\}$].

   a) [/2] Verifique que $\vec{0} = (0, 0, 0)$ pertenece a W

   b) [/2] Verifique que si $\vec{w_1} = \alpha_1\vec{u} + \beta_1\vec{v}$ y $\vec{w_2} = \alpha_2\vec{u} + \beta_2\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera que pertenecen a W, entonces $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ también pertenece a W.

   c) [/2] Verifique que si $\vec{w}$ es un vector cualesquiera que pertenece a W y λ es un real cualquiera, entonces $\lambda\vec{w}$ también pertenece a W.

   d) [/4] Considere el sistema con una única ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Encuentre la forma general de las soluciones al sistema. Exprese ésta como una combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^3$.

ÁLGEBRA LINEAL
NOMBRE/CÓDIGO: FEBRERO 12 2016

Examen I

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo así estén apagados. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA**. Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 $5pts$	
2 $/5pts$	
3 $/5pts$	
4 $/5pts$	
Total: $/20pts$	

TIEMPO 1 HORA 10 MINUTOS

1) Sean $u = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) **[1 pt]** Calcule las magnitudes de los vectores u y v

(b) **[1 pt]** Calcule el ángulo entre u y v

(c) **[1 pt]** Calcule la magnitud de $u + 2v$

(d) **[1 pt]** Calcule $\text{Proy}_v(3u + v)$

(e) **[1 pt]** Calcule el coseno del ángulo entre $u \times v$ y $u + v$

2)

(a) **[1 pt]** Encuentre la recta ℓ_1 que pasa por los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) **[1 pt]** Encuentre la recta ℓ_2 que pasa por el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ en dirección del vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) **[1 pt]** Encuentre la recta ℓ_3 que es ortogonal a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 y que pasa por el punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) **[1 pt]** Encuentre la intersección entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2

(e) **[1 pt]** Encuentre la ecuación del plano que es ortogonal a la recta ℓ_3 y que pasa por el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

3) Sean $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) **[1 pts]** Calcule AB y BA y concluya que en este caso sí se tiene que $AB = BA$

(b) **[1 pts]** Calcule $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$

(c) **[1 pts]** Escriba de manera explícita el sistema de ecuaciones dado por la ecuación matricial

$$B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b.$$

(d) **[2 pts]** Encuentre todas las soluciones x, y, z al sistema de ecuaciones lineales del punto (c).

4) Encuentre todos los puntos de intersección de los planos dados por:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 9y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ 16x & - & 7y & + & 5z & = & 0 \end{array}$$