

I Examen Parcial
Cálculo Vectorial

Nombre _____

1. Considere el punto $P(0,1,-2)$, la recta $l: \vec{r}(t) = (2,-1,3) + t(1,0,-1)$, el plano $\alpha: 2x - y + 3z = 5$ y la superficie $S: z = x^2 - 2y^2$.
- Halle la ecuación del plano β que pasa por el punto P y contiene la recta l .
 - Encuentre las coordenadas del punto Q donde la recta l intersecta al plano α .
 - Encuentre el ángulo agudo θ que forma la recta l con un vector normal al plano α .
 - Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto P .

- 2.
- Muestre que la ecuación $xyz = \ln(x + y^2 - 2z)$ cumple las condiciones para definir una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(x, y) = (3, 0)$ tal que $f(3, 0) = 1$.
 - Halle las derivadas: $f_x(3, 0), f_y(3, 0), f_{xy}(3, 0)$.

3. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por la función:

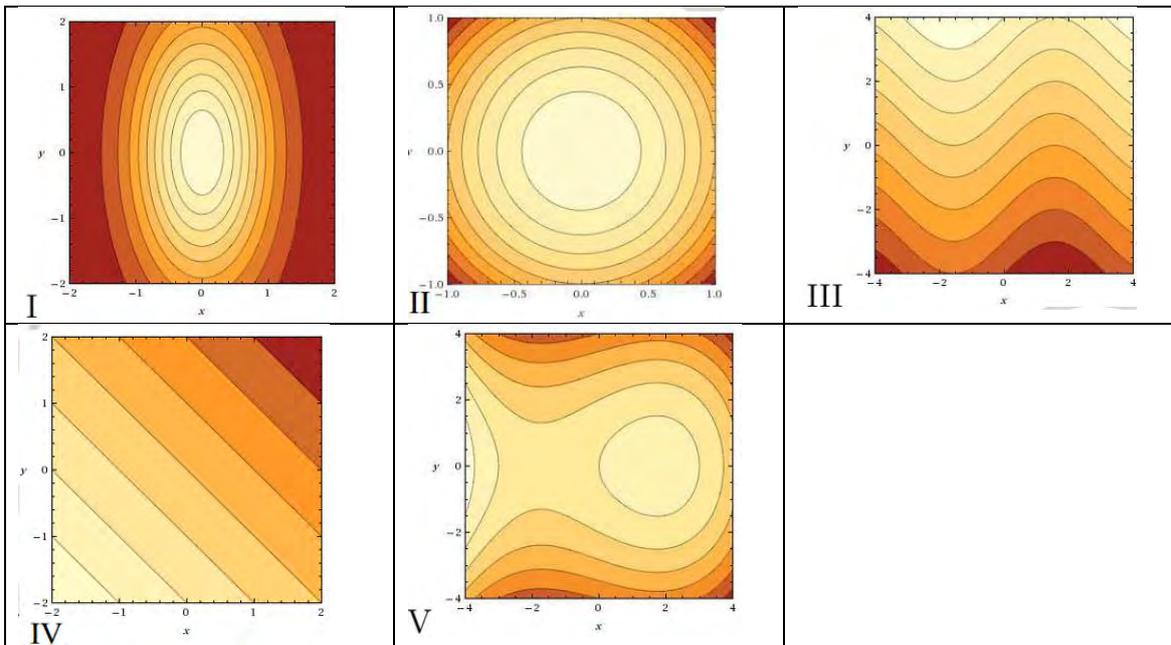
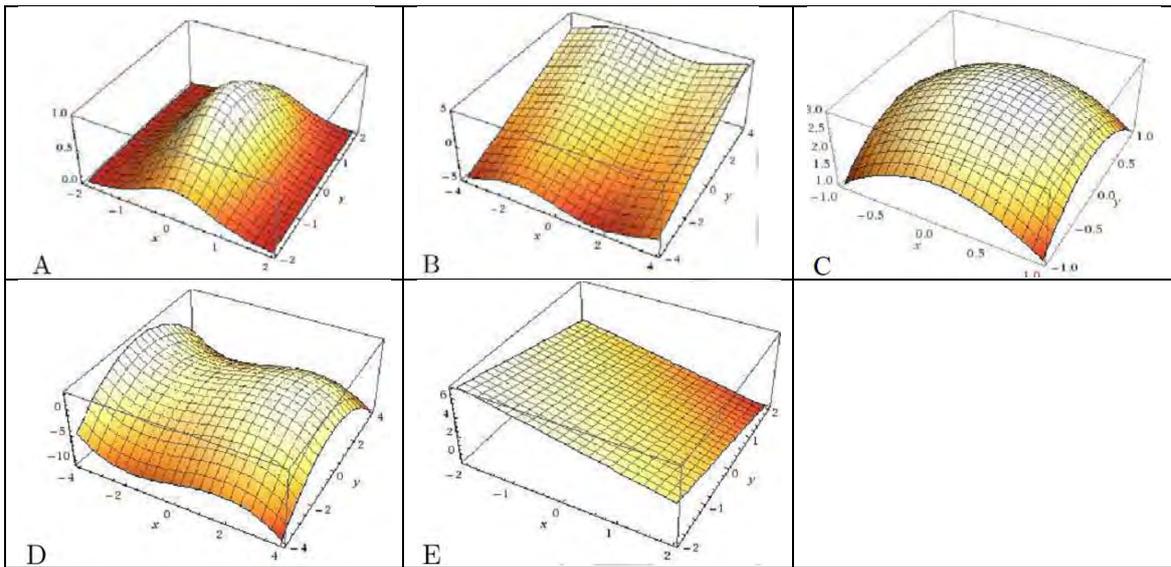
$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

donde T se mide en $^{\circ}\text{C}$ y x, y, z se miden en metros.

- Encuentre la tasa de cambio de la temperatura en el punto $P(2 - 1, 2)$ en la dirección de este punto hacia el punto $Q(3 - 3, 3)$.
 - En qué dirección crece más rápido la temperatura en el punto P ?
 - Encuentre la máxima tasa de cambio de la temperatura en el punto P .
4. Considere la curva de ecuaciones paramétricas $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 3 \sin t$.
- Encuentre las coordenadas (a, b) de los puntos donde la curvatura es máxima y donde es mínima.
 - Calcule la curvatura en estos puntos.

5. Complete la tabla con la letra mayúscula de la gráfica y el número romano de las curvas de nivel de las figuras dadas correspondientes al campo escalar de la tabla.

a.	$f(x, y) = x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}y^2$		
b.	$f(x, y) = y - \text{sen } x$		
c.	$f(x, y) = e^{-(x^2 + \frac{1}{4}y^2)}$		
d.	$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$		
e.	$f(x, y) = 2 - x - y$		



Primer Parcial MATE1207 Cálculo Vectorial (Tema A) ¹**Instrucciones:**

Lea cuidadosamente y conteste cada pregunta en la hoja asignada. Escriba con bolígrafo negro. No desprenda las hojas. Durante el examen no puede hablar con compañeros, no puede usar calculadora, celular, apuntes, cuadernos, textos ni aparatos electrónicos. Escriba todo su análisis si desea recibir el máximo puntaje. Buena suerte. Tiempo: 120 minutos.

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
Total:	50	

Sección	Profesor	Mi sección
01	Mauricio Velasco Grigori	
06	Mikhail Malakhaltsev	
11	Paul Bressler	
16	Jose Ricardo Arteaga	
21	Andrés Angel	
26	Marco Boggi	

Chequee su sección en la tabla →

Nombre: _____

Código: _____

Firma: _____

Bogotá, Septiembre 5, 2015

¹El juramento del uniandino dice: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”

1. (10 points) Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

Un laser se encuentra en el origen de \mathbb{R}^3 . Disparamos contra el espejo $z = 2x + 3y - 10$.

Hacia qu'e punto $P(a, b, c)$ del espejo deberiamos apuntar para que el laser pase por el origen despues de rebotar en el espejo? (La ley de la reflexión: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.)

Respuesta:

Solución:

2. (10 points) Si su respuesta y justificación son correctas obtendrá el máximo puntaje. Si su respuesta es incorrecta podrá obtener créditos parciales de acuerdo a su justificación.

Sea Γ la curva dada por la ecuación $4x^2 + y^2 = 1$.

- (a) Hallar la ecuación de la recta normal de la curva en el punto $A(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- (b) Hallar la curvatura en el punto A .
- (c) ¿En qué puntos de la curva Γ el radio de curvatura $R = \frac{1}{\kappa}$, donde κ es la curvatura, toma su valor máximo y cuál es?

Respuesta: (a)

(b)

(c)

Solución:

3. SI SU RESPUESTA Y JUSTIFICACIÓN SON CORRECTAS OBTENDRÁ EL MÁXIMO PUNTAJE. SI SU RESPUESTA ES INCORRECTA PODRÁ OBTENER CRÉDITOS PARCIALES DE ACUERDO A SU JUSTIFICACIÓN.

Sea S la superficie de nivel de la función $F(x, y, z) = e^{xz} - \cos(2xy) + xy$ que pasa por el punto $P = (1, 0, 0)$.

- (a) (3 points) Demuestre que existe una función diferenciable $f(x, y)$ definida en una vecindad del punto $(1, 0)$ cuya gráfica coincide con la superficie S cerca del punto P .
- (b) (3 points) Calcule $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$.
- (c) (4 points) Hallar un vector normal a la curva de nivel dada por la ecuación $f(x, y) = 0$ en el punto $(1, 0)$.

Respuesta: (b)

(c)

Solución:

4. SI SU RESPUESTA Y JUSTIFICACIÓN SON CORRECTAS OBTENDRÁ EL MÁXIMO PUNTAJE. SI SU RESPUESTA ES INCORRECTA PODRÁ OBTENER CRÉDITOS PARCIALES DE ACUERDO A SU JUSTIFICACIÓN.

La densidad de polvo en el espacio \mathbb{R}^3 está dada por la fórmula $\rho(x, y, z) = e^{-(x-1)^2-(y-2)^2-(z-3)^2}$. Una mosca se encuentra en la nube de polvo en el punto $P(4, 5, 6)$.

- (a) (5 points) A la mosca le gustaría ser capaz de respirar con mayor facilidad. ¿En qué dirección debe comenzar a volar la mosca con el fin de que el aire se vuelve más claro de la manera más eficiente?
- (b) (5 points) De repente la mosca se da cuenta de otra mosca situado en el origen de \mathbb{R}^3 . Si fuera a volar en la dirección de la otra mosca, ¿cuál sería la tasa de cambio de la densidad de polvo en el punto medio del segmento que conecta las dos moscas?

Respuesta: (a)

(b)

Solución:

5. NO HAY CRÉDITOS PARCIALES. LAS CINCO PARTES NO ESTÁN RELACIONADAS.

Llene la casilla en blanco con F (Falso) o V (Verdadero), según sea el caso.

(a) (2 points) La función $z = f(x+ay)$ es una solución para la ecuación diferencial parcial

$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$ para cualquier función $f(t)$ diferenciable.

(b) (2 points) Existe una función diferenciable $f(x, y)$ cuyas derivadas parciales son igua-

les a $\cos(xy)$ y $\sin(xy)$

(c) (2 points) La curvatura de una hipérbola es constante.

(d) (2 points) La curva $\vec{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^2 \rangle$, $0 \leq t \leq 1$ es más larga que la curva $\vec{s}(t) =$

$\langle t^2, 0, t^2 \rangle$, $0 \leq t \leq 1$

(e) (2 points) Si la rapidez es constante, entonces el vector aceleración es perpendicular

a la dirección del movimiento.

3. SI SU RESPUESTA Y JUSTIFICACIÓN SON CORRECTAS OBTENDRÁ EL MÁXIMO PUNTAJE. SI SU RESPUESTA ES INCORRECTA PODRÁ OBTENER CRÉDITOS PARCIALES DE ACUERDO A SU JUSTIFICACIÓN.

- (a) (4 points) (a) Demostrar que la ecuación $x + 2z + 3y = \sin(x^2 - z)$ define una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(1, -1)$ tal que $f(1, -1) = 1$.
- (b) (4 points) (b) Hallar los valores de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$, donde la función $f(x, y)$ es definida en la parte a).
- (c) (2 points) (c) Hallar la recta normal al gráfico de la función $z = f(x, y)$ definida en la parte a) en el punto $(1, -1, 1)$.

Respuesta: (b)

(c)

4. SI SU RESPUESTA Y JUSTIFICACIÓN SON CORRECTAS OBTENDRÁ EL MÁXIMO PUNTAJE. SI SU RESPUESTA ES INCORRECTA PODRÁ OBTENER CRÉDITOS PARCIALES DE ACUERDO A SU JUSTIFICACIÓN.

Sea Γ la curva en el plano dada por la ecuación paramétrica $\vec{r}(t) = (1 + \sin(2t), t^2 - \sin(t) - 1)$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

- (a) (5 points) Hallar la recta normal a la curva Γ en el punto $(1, -1)$.
(b) (5 points) Hallar la curvatura de la curva Γ en el punto $(1, -1)$.

Respuesta: a)

b)

5. NO HAY CRÉDITOS PARCIALES. LAS CINCO PARTES NO ESTÁN RELACIONADAS.

Llene la casilla en blanco con F (Falso) o V (Verdadero), según sea el caso.

- (a) (2 points) En el plano la recta l_1 dada por la ecuación $x - y - 1 = 0$ y la recta l_2 dada por la ecuación: $x = 2 + t$ y $y = t$ son paralelas.
- (b) (2 points) La función $f(x, y) = e^x \cos y$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
- (c) (2 points) La longitud de la curva parametrizada $\vec{r}(t) = (\cos t, 2 \sin t, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$, es mayor que 3.
- (d) (2 points) Si $\vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$, es una función vectorial diferenciable tal que para cada $t \in (a, b)$ tenemos $\|\vec{r}(t)\| = 9$, entonces los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ son perpendiculares para cada $t \in (a, b)$
- (e) (2 points) La Figura 1 muestra las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ correspondientes a los valores $0, 2, 4, \dots, 40$ de $f(x, y)$

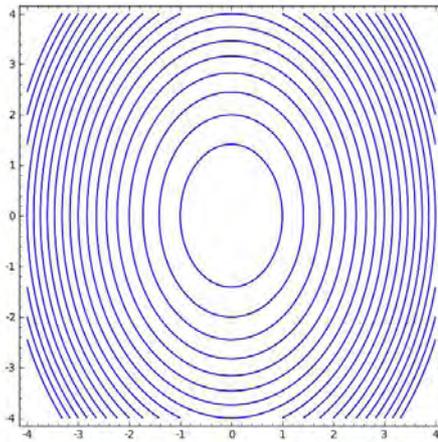


Figure 1. Las curvas de nivel de la función $f(x, y)$