Punto 1.a	Punto 1.b	Punto 1.c	Punto 1.d	Punto 2.a	Punto 2.b	Punto 3.a	Punto 3.b	Punto 3. c

Parcial 2: Algebra lineal. Tema A, 18 de Septiembre de 2015,

Nombre y apellido	código	Sección	Nota
			/50

Nota:
1. Por favor justificar todas sus respuestas y escribir claro.
2. Contestar en los espacios reservados para las soluciones de los ejercicios.
3. Una hoja sin nombre no se corregirá.
4. Sobre su puesto debe tener únicamente éste cuadernillo, algo con que escribir y algo con que borrar.
5. sección 27= Jerson 10 a.m., sección 28= Juan Camilo 10 a.m., sección 29= Jerson 12 m., sección 30= Juan Camilo 12 m.

1. [/16] Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) [/4]Encontrar base para C_A, el espacio de las columnas de A.
   b) [/4] Diaga cual es la dimensión de N_A, el espacio núlo de A. Justificar su respuesta.
   c) [/4] Encontrar una base para R_A, el espacio de las filas de A.
   d) [/4] Sea $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, la transformación lineal definida por:

$$T_A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

   Diga cuanto es $rango(T_A)$. Justificar su respuesta. [Recuerde que $rango(T_A)$ es la dimensión de $Im(T_A)$, la imagen de T_A, también llamada rango de T_A].

2. [/14] Sean $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -16 \end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

   a) [/8] Muestre que $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$ y calcúle adems que es $[\vec{v}]_B$, el vector de coordenadas de $\vec{v}$ con respecto a la base B.

   b) [/6] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal tal que $T(\vec{b_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\vec{b_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T(\vec{b_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Halle $T(\vec{v})$.

3. [/20] Sea $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices de 2×2, con entradas en $\mathbb{R}$.

a) [/6] Diga cuanto es $dim(V)$. Justificar su respuesta exhibiendo la base caónica para V.

b) [/7] Sea D el subconjunto de V formado por las matrices triangulares superiores. Más precisamemente:

$$D = \{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Demuestre que D es un subespacio de V.

c) [/7] Sean $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ tres matrices en V. Diga si A_1, A_2 y A_3 son linealmente independientes y encuentre una basae para $Span(A_1, A_2, A_3)$. [Conviene usar la técnica de la coordinatización con respecto a la base canónica de V].

Parcial 2 (Duración: 1h20)

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale** 2 **puntos.**

Ejercicio 1

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[X] = \{a_2X^2 + a_1X + a_0 : \forall\, k \in \{0;1;2\}, a_k \in \mathbb{R}\}$ de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2.

a. Justificando su respuesta, muestre que la dimensión de $\mathbb{R}_2[X]$ es igual a 3.

b. Muestre que la familia $(P_1, P_2, P_3) = (2X, X^2+1, X^2-1)$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. Halle las coordenadas del vector $Q = 4X + 6$ en la base (P_1, P_2, P_3).

Ejercicio 2

Sea R la recta de ecuación $y = -x$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta R: $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Se denotará a continuación $v_1 := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ y $v_2 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. La base canónica de $\mathbb{R}^2$ se denotará (e_1, e_2).

a. Halle coeficentes (α, β) y (λ, μ) tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 = e_1$ y $\lambda v_1 + \mu v_2 = e_2$.

b. Determine la matriz A de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (es decir, la matriz estándar de T) y la expresión general de $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3

Sea T la aplicación

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}x+2y\\x-y\\-4x-2y\end{pmatrix}\end{cases}$$

a. Muestre que T es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ y determine la matriz estándar de T (es decir, la matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

b. Calcule el rango de T.

c. Calcule la dimensión del núcleo de T.

Ejercicio 4

a. Sea $T : E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales E_1 y E_2 y sea $\ker T$ el núcleo de T. Mostrar que $\ker T$ es un sub-espacio vectorial de E_1.

b. Sea $T : E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales E_1 y E_2 y sea $\operatorname{Im} T$ la imagen de T. Mostrar que $\operatorname{Im} T$ es un sub-espacio vectorial de E_2.

Álgebra Lineal, Parcial 2 (versíon 2)
15 de septiembre de 2015

Nombre:

Código:

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permiten el uso de notas ni calculadoras. Por favor escriba su nombre en esta hoja y también en las hojas donde se encuentran sus soluciones.

1. Sea $Y = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.
   (a) (3 points) Encuentre una base de Y.
   (b) (1 point) Cuál es la dimensión de Y?
2. Defina la transfomación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$.
   (a) (2 points) Calcule $T\left(T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)\right)$.
   (b) (2 points) Encuentre el núcleo de T.
   (c) (2 points) ¿T es invertible? ¿Por que o por que no?
3. (3 points) Suponga que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal que satisface
   $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.
4. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos.
   Sea $W_1 = \{f \in P_2 : \ f(3) = 0\}$ y sea $W_2 = \{f \in P_2 : \ f(3) \geq 0\}$.
   (a) (3 points) Demuestre que W_1 es un subespacio de P_2.
   (b) (2 points) Encuentre dos polinomios linealmente independientes en P_2. (No es necesario justificar la independencia.)
   (c) (2 points) Demuestre que W_2 *no* es un subespacio de P_2.

MATE1105 - ALGEBRA LINEAL
Segundo Examen Parcial
15 de septiembre de 2015
3:30 pm a 4:50 pm

Nombre:
Código:
Profesor de complementarias:

Este examen contiene 4 preguntas. El total del puntaje es 20. Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Calculadoras, teléfonos, y demás equipos electrónicos deben estar apagados y guardados durante todo el examen. Todas las respuestas deben ser justificadas.

Tabla de calificación (para uso únicamente del profesor)

Pregunta	Valor	Puntaje
1	8	
2	3	
3	4	
4	5	
Total	20	

---

1. Considere la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
   (a) (2 puntos)Halle el rango de la matriz.
   (b) (2 puntos) Halle una base para el espacio de filas.
   (c) (2 puntos) Halle una base para el espacio de columnas.
   (d) (2 puntos) Halle una base para el espacio nulo.

2. Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $T((1,-1)) = (0,1,0)$ y $T((2,1)) = (1,1,0)$.
   (a) (1 punto) Encuentre $T((0,5))$.
   (b) (2 puntos) Halle la matriz que representa la transformación.

3. Sea W_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2,0,0)$ y $(1,0,0)$. Y sea W_2 el subespacio generado por los vectores $(0,1,1)$ y $(0,0,-1)$.
   (a) (2 puntos) Verifique que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   (b) (2 puntos) Encuentre un conjunto de vectores que genere $W_1 \cap W_2$.

4. Justificando su respuesta con una demostración o con un contraejemeplo diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Solamente se considerarán respuestas justificadas.

   (a) (1 punto) Los polinomios $1 + x^2$ y $1 - x^2$ son linealmente independientes como vectores del espacio vectorial de los polinomios.

   (b) (1 punto) La transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en si mismo dada por $T((x, y)) = (-y, -x)$ es una rotación del plano.

   (c) (1 punto) Si T es una transformación lineal invertible de $\mathbb{R}^2$ en si mismo entonces existe un escalar r tal que para cada vector x de $\mathbb{R}^2$ se tiene que $T(x) = rx$.

   (c) (1 punto) En un espacio vectorial todo vector V es diferente a su opuesto $-v$.

   (d) (1 punto) Si W_1 y W_2 son subespacios del espacio vectorial V, $W_1 \cup W_2 = V$.