Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Parcial 2 - Calculo Diferencial. Septiembre 17 de 2015

1. [**4pts**] Halle la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes ecuaciones:

   a) $y = \ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)$

   b) $y = \tan\left(\operatorname{sen}^{-1}(x^2)\right)$

   c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

   d) $x + y^2 = e^{y/x}$

2. [**3 pts**] Encuentre los valores de a y b de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + ax$ tenga la recta tangente $y = 2x + b$ en $x = -3$.

3. [**3 pts**] Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

   a) Halle todas las asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f.

   b) Halle la ecuación de la línea tangente a la gráfica de la función f que pasa por el punto $(1, 1)$.

Cálculo Diferencial - Parcial No. 2 - Sección 1

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Lunes, Marzo 9 de 2015

No se permite el uso de ningún tipo de apuntes, libros o calculadoras. Cualquier dispositivo electrónico (en particular su celular) debe permanecer apagado durante el examen.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

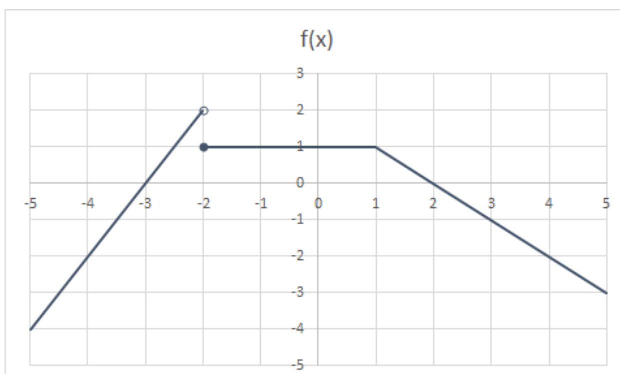
Duración: 60 minutos.

1. **[3 puntos]** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{1 - x^2} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} - x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   a) Halle los valores de a y b para que la siguiente función sea contínua en todos números reales.
   b) Halle las asíntotas horizontales de f.

2. **[3 puntos]** A continuación se muestra la gráfica de f:



   a) En cuáles puntos f NO es diferenciable. Justifique su respuesta.
   b) Si $F(x) = (f \circ f)(x)$, encuentre $F'(-3)$.
   c) Si $g(x) = f(x^2)$, encuentre $g'(2)$.
   d) Si $h(x) = [f(x)]^2$, encuentre $h'(-4)$.

3. **[3 puntos]** Derive la función.

   a) $f(x) = \dfrac{e^x \tan x}{x}$
   b) $y = \sin(x + \sqrt{1 + x^2})$

4. **[3 puntos]** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - 2xy + y^3 = 2$ en el punto $(1, -1)$.

5. **[3 puntos]** Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función $f(x) = 2\sin x + \cos^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

Cálculo Diferencial
Parcial II

1. Haga los siguientes puntos.

   (a) (5pts) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = cos^2(\pi^2 x)$ en $x = 0$.

   (b) (5pts) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la ecuación $x^y = y^x$ en el punto (2,4).

2. Haga los siguientes puntos usando la definición de derivada (Puede usar todas las reglas de límites que conozca!).

   - (5pts) Halle la derivada de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$ (o demuestre que no existe).
   - (5pts) Halle la derivada de la función $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$ (o demuestre que no existe).

3. Haga los siguientes puntos.

   (a) (7pts) Demuestre que la derivada de $f(x) = arcsen(x)$ es igual a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   (b) (7pts) Encuentre una función continua, inyectiva y diferenciable en todo punto, cuya inversa no sea diferenciable en $x = 0$.

4. (10pts) Una balsa es halada hacia un muelle por una cuerda que está amarrada a la punta de la balsa y a una polea en el borde del muelle. La polea está a 1 metro sobre el nivel del mar (y por ende un metro más arriba de la balsa). Si la cuerda es halada a razón de $1m/s$ a que velocidad se mueve el bote cuando está a 8 metros de la base del muelle (que queda justo debajo de la polea)?

5. (10pts) Una lámpara alumbra encima del punto $x = 3$ alumbra hacia la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$ creando una sombra que termina en el punto $x = -5$. Qué tan alta es la lámpara?

BONO

Un círculo de radio 1 se mete adentro de la gráfica $y = x^2$, hasta que los bordes del círculo tocan la gráfica y no se puede bajar más. En qué punto quedó el centro del círculo?

Ejercicio 5. [1] Responda a 2 de las siguientes preguntas, en caso de responder a las tres sólo se tendrá en cuenta la respuesta a las dos primeras.

(I) El teorema del valor intermedio establece que:[1]

(a) Sea $f(x)$ una función diferenciable en $[a, b]$, $m = Min(f(a), f(b))$, y $M = Max(f(a), f(b)$, entonces para todo valor $d \in [a, b]$ existe un valor $c \in [m, M]$ tal que $f(c) = d$.

(b) Sea $f(x)$ una función diferenciable en $[a, b]$, $m = Min(f(a), f(b))$, y $M = Max(f(a), f(b)$, entonces para todo valor $d \in [m, M]$ existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

(c) Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, $m = Min(f(a), f(b))$, y $M = Max(f(a), f(b)$, entonces para todo valor $d \in [a, b]$ existe un valor $c \in [m, M]$ tal que $f(c) = d$.

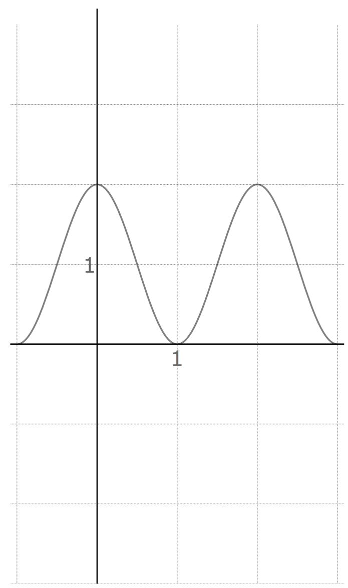
(d) Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, $m = Min(f(a), f(b))$, y $M = Max(f(a), f(b)$, entonces para todo valor $d \in [m, M]$ existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

(e) Sea $f(x)$ una función continua en (a, b), $m = Min(f(a), f(b))$, y $M = Max(f(a), f(b)$, entonces para todo valor $d \in [a, b]$ existe un valor $c \in [m, M]$ tal que $f(c) = d$.

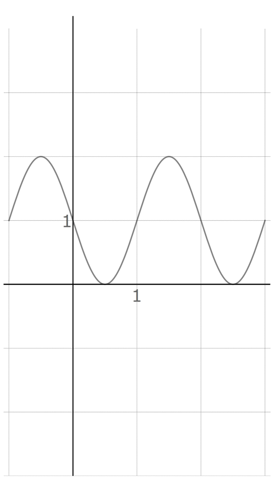
(II) Si $f(5) = g'(5) = \pi$ y $g(5) = f'(5) = e$, entonces $\lim_{x \to 5} \dfrac{g(x)f(x) - e \cdot \pi}{x - 5} =$

(a) $-e^2 + \pi^2$ (b) $e^2 + \pi^2$ (c) 0 (d) $2e\pi$ (e) No existe el límite.

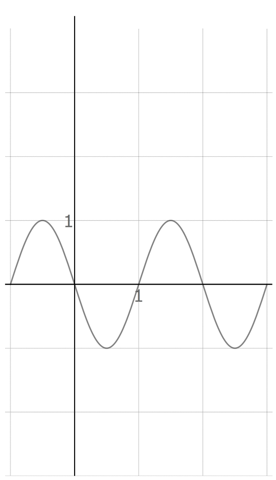
(III) Se muestra el grafo de $f(x)$ elija el grafo de $f'(x)$.



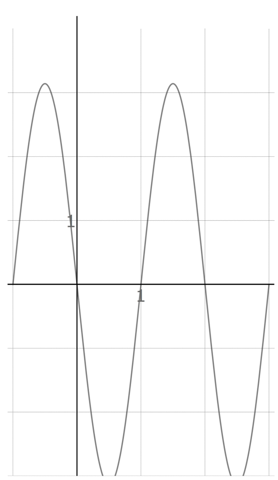
(a)



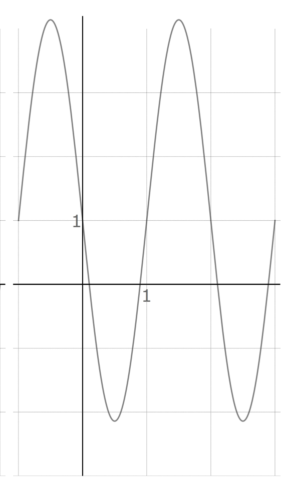
(b)



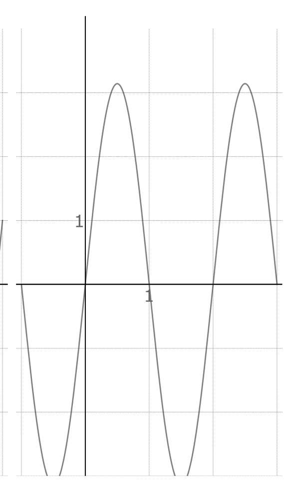
(c)



(d)



(e)



---

[1] Recuerde que $x \in [y, z]$ lo interpretamos como: "x es un número que cumple que $y \leq x \leq z$ "

MATE 1203-2
Parcial 2

15 de Septiembre de 2015

Nombre	Código/ Identificación	Nota

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5

Esto es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón hasta que haya entregado el examen y salido del salón. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma *clara y ordenada* el procedimiento *completo* que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable. Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.

Ejercicio 1. [1] Calcule **UNO** de los siguientes límites explicando cada una de las reglas que usó. Respuestas sin justificación no ameritarán crédito parcial. Si va a hacer uso de algún teorema no presentado en clase deberá enunciarlo apropiadamente y explicar porqué es valido el uso de ese teorema.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2-x-2}{x^2-4}}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3e^x-5e^-x}{5e^x+4e^-x}$

Ejercicio 2. [1] Encuentre y' para **UNA** de las siguientes funciones:

(a) $y = \sec^2\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1+3x^2}}\right)$ (b) $y = \dfrac{\sin^2(x)\sqrt[3]{\cos(2x+1)}}{e \cdot x - \pi}$

Ejercicio 3. [1] (a) Encuentre la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^2 + \ln x}{\cos(\pi x)}$ cuando $x = 1$; y (b) estime $f(1.1)$

Ejercicio 4. [1] (a) Enuncie el teorema de la función inversa y úselo para calcular la recta tangente a $y = f^{-1}(x)$ en el punto $(6, 1)$ para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

Parcial 2 - MATE 1203-39 - Universidad de Los Andes - Tema B

Nombre y apellido del estudiante: ____

1	2	3	4	B	Nota
					/ 5.0

- Respuestas sin **procedimiento** o con procedimiento incorrecto no son válidas.
- Cualquier dispositivo electrónico que se encuentre encendido causará anulación del examen del estudiante (nota 0.00).
- Todo **cálculo de límites** debe estar **justificado** ya sea por **propiedades** de las funciones, propiedades de los límites, o por algún teorema visto **en clase**.
- No se responden preguntas durante el examen.

Ejercicios

1. (5 puntos) Hallar, justificando, el valor **exacto** del límite

$$\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\sin\left(\frac{2(x^3-1)}{3(x-1)}\right)\right)$$

Simplifique la respuesta a un valor sin funciones trigonométricas o trignométricas inversas.

2. Hallar las ecuaciones de las **asíntotas** verticales y horizontales de la función

$$f(x) = \left[\frac{\sqrt{3x^2+7}}{x}\right] \cdot \left[\frac{(x^2-5x+6)}{x(x-3)}\right]$$

3. (5 puntos) Hallar el valor de c que hace continua a la función en todos los reales, (en particular debe justificar la continuidad en los valores $x \neq 1$),

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3c, & x \leq 1. \\ \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

4. (5 puntos) Hallar el límite, si existe

$$\lim_{x\to 0} \sin(x + x^3)\sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

5. Ejercicios opcionales

a) (5 puntos) Suponga que f es continua en todos los reales y $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$, hallar $f(0)$.

b) (5 puntos) Suponga que $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, y $\lim_{x\to 1} (h(x) + g(x)) = 5$. Use propiedades de los límites para demostrar que el límite $\lim_{x\to 1} h(x)$ existe, y halle su valor. (**Precaución**: el razonamiento en este ejercicio debe ser muy cuidadoso).

CALCULO DIFERENCIAL PARCIAL 2.

(1) Calcule los siguientes limites si existen. Si no existen justifique por que.

a)

$$Lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}.$$

b)

$$Lim_{t\to-\infty}\frac{3-t}{\sqrt{4+3t^2}}.$$

(2) Hallar el conjunto en el que la siguiente función es continua. Justifique su respuesta.

$$g(x)=\begin{cases}4x+3 & \text{si } x<-1/4\\ sec^2(\pi x) & \text{si } -1/4\le x<1/2\\ ln(2x) & \text{si } 1/2\le x<e/2\\ (ln(x)+ln(2)-1)^2 & \text{si } e/2\le x\end{cases}$$

(3) Hallar la derivada de las siguientes funciones, simplifique la expresión de ser posible.

a) $f(x)=x^3e^{-x}tan(x)$.

b) $h(t)=\dfrac{tan(t)+1}{1-t^2}$.

c) $g(s)=\sqrt{s+\sqrt{s+\sqrt{s}}}$.

(4) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y=\frac{x+2}{x^2-x-6}$$

que contengan al punto $(-5,1)$.

Date: Marzo 7 2016.

CALCULO DIFERENCIAL PARCIAL 2.

(1) Calcule los siguientes limites si existen. Si no existen justifique por que.

a)

$$Lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^2+8x}{x(x^2+2x+1)}.$$

b)

$$Lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}.$$

(2) Hallar el conjunto en el que la siguiente función es continua. Justifique su respuesta.

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}+e^x-2}{e^x-1} & \text{si } x<0\\ 2cos(\pi x)+1 & \text{si } 0\le x\le 2\\ tan^2(\pi x/6) & \text{si } 2<x<3\\ x & \text{si } 3\le x\end{cases}$$

(3) Hallar la derivada de las siguientes funciones, simplifique la expresión de ser posible.

a) $f(x)=x^2e^xcos(x)$.

b) $h(t)=\dfrac{e^{t^2}}{1+cos(t)}$.

c) $g(s)=tan^2(\frac{s^2+1}{s})-sec^2(\frac{s^2+1}{s})$.

(4) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y=\frac{1-x}{1-x^2}$$

que contengan al punto $(-2,1)$.

Date: Marzo 7 2016.