Examen Parcial III Tema A - Álgebra Lineal

Selección múltiple (30 puntos, 40 minutos)

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces la matriz de coeficientes triangular superior de la forma cuadrática $\vec{x}^T A \vec{x}$ es

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *e)* N.A.

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ proyecta a $\mathbb{R}^4$ ortogonalmente sobre su subespacio vectorial

   a) $\text{gn}\big((0,1,0,1),(1,0,1,0)\big)$ *b)* $\big\{(r,r,s,s) \mid r,s \in \mathbb{R}\big\}$

   c) $\text{gn}\big((1,1,1,1)\big)$ *d)* $\big\{\frac{1}{2}(r,s,s,r) \mid r,s \in \mathbb{R}\big\}$ *e)* N.A.

3. La dimensión del complemento ortogonal (en $\mathbb{R}^6$) del espacio fila de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a *a)* 0 *b)* 2 *c)* 4 *d)* 6 *e)* N.A.

4. La matriz de proyección sobre el hiperplano $x_3 = 0$ en $\mathbb{R}^4$ es

   a) $\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ *e)* N.A.

5. Considere las siguientes afirmaciones relacionadas con la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

   i) $A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$ para cualesquiera vectores (columna) $\vec{x}$ y $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^3$.
   ii) A es invertible y $A^{-1} = A^T$.
   iii) Las filas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

   De estas afirmaciones son verdaderas

   a) Todas *b)* Solamente *i)* y *ii)* *c)* Solamente *i)* y *iii)* *d)* Solamente *ii)* y *iii)*
   e) N.A.

6. La ecuación del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $P(-1,0,1)$, $Q(1,2,3)$ y $R(2,2,2)$ es

   a) $x+2y+z=0$ *b)* $x-2y+z=0$

   c) $x+2y+z=-1$ *d)* $x-2y+z=1$ *e)* N.A.

7. En $\mathbb{R}^3$, la recta $(x,y,z)=(1+t,1-t,t),\ t\in\mathbb{R}$, corta al plano $x+2y+3z=12$ en el punto

   a) $(1,1,0)$ *b)* $(1,2,3)$ *c)* $(4,-2,3)$ *d)* $(3,-3,3)$ *e)* N.A.

8. En $\mathbb{R}^4$, la distancia del punto $(1,-1,1,-1)$ al hiperplano de ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ es igual a

   a) 0 *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* 1 *d)* $\frac{3}{2}$ *e)* N.A.

9. En $\mathbb{R}^5$, el punto sobre el segmento de recta que une a $(1,2,3,4,5)$ y a $(-1,-2,-3,-4,-5)$ y que está a $\frac{2}{5}$ de camino de $(-1,-2,-3,-4,-5)$ a $(1,2,3,4,5)$ es

   a) $\frac{2}{5}(1,2,3,4,5)$ *b)* $\frac{1}{5}(-1,-2,-3,-4,-5)$

   c) $\frac{2}{5}(-1,-2,-3,-4,-5)$ *d)* $\frac{1}{5}(1,2,3,4,5)$ *e)* N.A.

10. Las dos rectas en $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
R_1 &: (x,y,z)=(1,0,0)+r(1,1,2),\ r\in\mathbb{R},\ \text{y}\\
R_2 &: (x,y,z)=(1,0,0)+s\left(0,1,-\tfrac{1}{2}\right),\ s\in\mathbb{R},
\end{aligned}
$$

   a) Son paralelas *b)* Forman un ángulo de 45° *c)* Son perpendiculares

   d) No se cortan *e)* N.A.

Examen Parcial III - Álgebra Lineal

Problemas de desarrollo (20 puntos, 20 minutos)

1. (10 puntos) Halle la distancia entre las rectas paralelas

$$
\begin{aligned}
R_1 &: (x, y, z) = (0, 1, 0) + r(1, 2, 1),\ r \in \mathbb{R},\ \text{y} \\
R_2 &: (x, y, z) = (0, 0, 1) + s(1, 2, 1),\ s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2. (10 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \phantom{{}-x_5} &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

y escriba el conjunto solución como una variedad lineal.

2. (10 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \phantom{{}-x_5} &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

y escriba el conjunto solución como una variedad lineal.

Examen Parcial III Tema B - Álgebra Lineal

Selección múltiple (30 puntos, 40 minutos)

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces la matriz de coeficientes triangular superior de la forma cuadrática $\vec{x}^T A \vec{x}$ es

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e)* N.A.

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ proyecta a $\mathbb{R}^4$ ortogonalmente sobre su subespacio vectorial

   a) $\text{gn}\big((0,1,0,1),(1,0,1,0)\big)$ *b)* $\left\{\frac{1}{2}(r,s,s,r) \mid r,s \in \mathbb{R}\right\}$

   c) $\left\{(r,r,s,s) \mid r,s \in \mathbb{R}\right\}$ *d)* $\text{gn}\big((1,1,1,1)\big)$ *e)* N.A.

3. La dimensión del complemento ortogonal (en $\mathbb{R}^6$) del espacio fila de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a *a)* 0 *b)* 6 *c)* 2 *d)* 4 *e)* N.A.

4. La matriz de proyección sobre el hiperplano $x_3 = 0$ en $\mathbb{R}^4$ es

   a) $\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ *e)* N.A.

5. Considere las siguientes afirmaciones relacionadas con la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

   i) $A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$ para cualesquiera vectores (columna) $\vec{x}$ y $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^3$.
   ii) A es invertible y $A^{-1} = A^T$.
   iii) Las filas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

   De estas afirmaciones son verdaderas

   a) Todas *b)* Solamente *ii)* y *iii)* *c)* Solamente *i)* y *ii)* *d)* Solamente *i)* y *iii)*
   e) N.A.

6. La ecuación del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $P(-1,0,1)$, $Q(1,2,3)$ y $R(2,2,2)$ es

   a) $x+2y+z=0$ *b)* $x-2y+z=1$

   c) $x-2y+z=0$ *d)* $x+2y+z=-1$ *e)* N.A.

7. En $\mathbb{R}^3$, la recta $(x,y,z)=(1+t,1-t,t),\ t\in\mathbb{R}$, corta al plano $x+2y+3z=12$ en el punto

   a) $(1,1,0)$ *b)* $(3,-3,3)$ *c)* $(1,2,3)$ *d)* $(4,-2,3)$ *e)* N.A.

8. En $\mathbb{R}^4$, la distancia del punto $(1,-1,1,-1)$ al hiperplano de ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ es igual a

   a) 0 *b)* $\frac{3}{2}$ *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* 1 *e)* N.A.

9. En $\mathbb{R}^5$, el punto sobre el segmento de recta que une a $(1,2,3,4,5)$ y a $(-1,-2,-3,-4,-5)$ y que está a $\frac{2}{5}$ de camino de $(-1,-2,-3,-4,-5)$ a $(1,2,3,4,5)$ es

   a) $\frac{2}{5}(1,2,3,4,5)$ *b)* $\frac{1}{5}(1,2,3,4,5)$

   c) $\frac{1}{5}(-1,-2,-3,-4,-5)$ *d)* $\frac{2}{5}(-1,-2,-3,-4,-5)$ *e)* N.A.

10. Las dos rectas en $\mathbb{R}^3$

$$R_1:(x,y,z)=(1,0,0)+r(1,1,2),\ r\in\mathbb{R},\ \text{y}$$
$$R_2:(x,y,z)=(1,0,0)+s\left(0,1,-\tfrac{1}{2}\right),\ s\in\mathbb{R},$$

   a) Son paralelas *b)* No se cortan *c)* Forman un ángulo de 45°

   d) Son perpendiculares *e)* N.A.

Examen Parcial III - Álgebra Lineal

Problemas de desarrollo (20 puntos, 20 minutos)

1. (10 puntos) Halle la distancia entre las rectas paralelas

$$R_1 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + r(1, 2, 1),\ r \in \mathbb{R},\ \text{y}$$
$$R_2 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + s(1, 2, 1),\ s \in \mathbb{R}.$$

2. (10 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

y escriba el conjunto solución como una variedad lineal.

Tercer Parcial Algebra Lineal

LOS 2 PRIMEROS EJERCICIOS SON **<u>OBLIGATORIOS.</u>** DE LOS EJERCICIOS 3, 4 & 5, ESCOJA 2 DE ELLOS Y RESUÉLVALOS.
Si hace los 5 ejercicios, indique cuál es el bono y ese será calificado sobre 0,5.
Justifique plenamente sus respuestas. Respuesta sin justificación no tiene **ningún valor**.
Esta es una prueba individual. No se permite el uso de libros ni apuntes, ni el uso de calculadoras, celulares o reproductores de sonido.

TEMA A

1. [1,25 puntos] Considere la siguiente matriz A

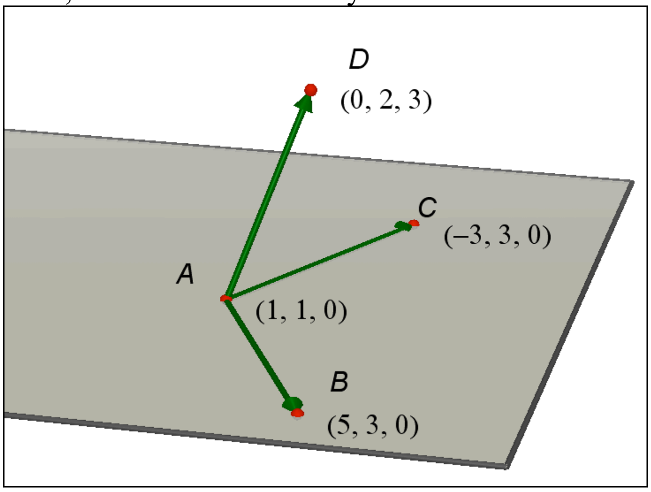
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

   a. Demuestre que los valores propios de A son 1 y 6
   b. Calcule las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio de la matriz A
   c. Es A diagonalizable? Si lo es, justifique y encuentre la matriz C invertible y la matriz D diagonal que la diagonalizan

2. [1,25 puntos] Considere la transformación lineal $T : P_3 \rightarrow P_2$ tal que $T[p(x)] = p'(x)$, donde $p'(x)$ es la derivada del polinomio $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$
   a) Considere P_3 con la base $B_1 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ y P_2 con la base $B_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$
   Sean $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B' = \{1, x, x^2\}$ las bases canónicas de P_3 y P_2 respectivamente
   Encuentre la matriz de cambio de base C de la base B_1 a la base B y la matriz de cambio de base C' de la base B' a la matriz B_2.
   b) Encuentre la representación matricial estándar $R_{BB'}$ de la transformación T en las bases B y B'.
   c) Plantee y encuentre la matriz de transformación R_{B1B2} de la transformación T en las bases B_1 y B_2 como producto de matrices de cambio de base y la representación matricial estándar $R_{BB'}$.

3. [1,25 puntos] Sea W = gen A donde A es el conjunto {[1,1,1,1]; [1,-1,1,-1]; [1, 2, 3, 4]} de vectores en $\mathbf{R}^4$ y **b** el vector [1, 3, 5, -8]
   a. Halle una base ortogonal para W
   b. Determine $W^{\perp}$, el complemento ortogonal de W
   c. Encuentre la proyección de b en W
   d. Descomponga b como proyección en W y proyección en $W^{\perp}$

4. [1,25 puntos] Considere los siguientes puntos: A (1, 1, 0); B (5, 3, 0); C (-3, 3,0) y D (0, 2, 3) en R^3. Considere los vectores **u**, **v** y **w** definidos como:
u = **AB** = **OB** – **OA**, **v** = **AC** = **OC** – **OA** y **w** = **AD** = **OD** – **OA**



a. Encuentre los vectores **u** y **v**
b. Determine el área del paralelogramo generado por los vectores **u** y **v**
c. Encuentre el vector **w**
d. Los vectores **u**, **v** y **w** forman una caja? Es decir, son coplanares? En caso de formar una caja, calcule su volumen. Justifique su respuesta.

5. [1,25 puntos] Considere el sistema lineal Ax = b, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$x = [x_1, x_2, x_3]$ y $b = [1, 1, 1]$

a. Determine la solución del sistema lineal utilizando la regla de Cramer.
b. Determine la adjunta de la matriz A y calcule la inversa de A.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
TERCER PARCIAL. ALGEBRA LINEAL
JULIO 16 DE 2009. [redacted]

1. Halle una base ortonormal del subespacio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 : x - 2y + z = 0 \right\}$ y encuentre además la proyección del vector (1,-1,3) sobre W

2. Los valores propios de la matriz A son 1, 1 y -1. El núcleo de la matriz $A - I$ es $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 : x - 2y + z = 0 \right\}$ y el núcleo de la matriz $A + I$ es $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 : x = t,\ y = 2t,\ z = t \right\}$ y. Halle la matriz

3. Realice lo que se indica: Justifique claramente sus respuestas

a) Si A y B son matrices similares, demuestre que $A^t \ y B^t$ también son similares

b) Decida si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es o no diagonalizable.

c) Si A es diagonalizable, ¿A es invertible?

TIEMPO: 60 MINUTOS

¡SUERTE!

Opcional: Si $A^2 = 2I$, demuestre que la matriz $A + I$ es invertible

ALGEBRA LINEAL - EXAMEN III
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
[redacted]

1. (a) Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Debe justificar brevemente sus respuetas.

(i) Encuentre los autovalores de A.

(ii) Usando (i) puede determinar si A es diagonalizable?

(iii) Usando (i) puede determinar si A es invertible?

(iv) Verifique su respuesta en (iii) calculando $det(A)$.

(b) Considere la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Debe justificar brevemente sus respuetas.

(i) Encuentre los autovalores de B con sus correspondientes multiplicidades algebraicas.

(ii) Encuentre los autoespacios asociados a los autovalores encontrados en (i) y determine las multiplicidades geométricas de cada autovalor.

(iii) Es B diagonalizable?

(iv) Encuentre $det(B)$ y determine si B es invertible.

2. (a) Encuentre un vector no nulo en $\mathbb{R}^4$ que sea perpendicular a todos los vectores en $W = span\{(1,0,-1,1),(0,0,-1,1),(2,-1,2,0)\}$.

(b) Es fácil ver que $\{(1,0,-1,1),(0,0,-1,1),(2,-1,2,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente, no debe verificar esto, simplemente use ese hecho para determinar el número máximo de vectores linealmente independientes y perpendiculares a W que se pueden encontrar.

RESUELVA (3) o (4).

3. (a) Falso-Verdadero. Dados $\bar{a}, \bar{b}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. La proyección del vector $\bar{b}$ sobre $span(\bar{a})$ es un multiplo de $\bar{b}$.

(b) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Considere $W^\perp$ el complemento ortogonal de W. Qué puede decir de de la intersección entre W y $W^\perp$, $W \cap W^\perp$. Qué elementos están ahí?

(c) Sean a_1, a_2 y a_3 tres vectores en $\mathbb{R}^3$, supongamos que a_1 y a_2 son linealmente independientes, es decir, generan un subespacio 2-dimensional. Si $det(a_1|a_2|a_3) = 0$ donde está a_3? $a_1|a_2|a_3$ es la matriz que tiene por columnas a a_1, a_2 y a_3.

4. Sea $R_{\pi/4} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación por $\pi/4$ en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. Pensando geométricamente que puede decir de los autovalores y autovectores de $R_{\pi/4}$? Existe? Si o no y por qué? En caso de existir quienes serían? Puede justificar su repuesta con unos buenos dibujos!!

Tiempo: 50 min.

Algebra lineal - Parcial IV.

[redacted]

1. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ una base ordenada ortonormal para $\mathbb{R}^4$. Si $\bar{b} \in \mathbb{R}^4$ y $(2, 1, 4, -3)$ son las coordenadas de $\bar{b}$ relativas a la base A, encontrar la norma de $\bar{b}$.

2. Sean A y B dos matrices de 3×3 ortogonales. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ y $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $S(\bar{x}) = B\bar{x}$, entonces la transfomacion lineal compuesta $S \circ T$ es una transformación ortogonal?

3. Sea $B = \{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$.

   (i) Sea $W = span(B)$. Verificar que B es una base ortonormal para W.

   (ii) Encontrar la matriz de proyección sobre W.

   (iii) Encontrar la proyección de $\bar{b} = (6, -12, -6)$ sobre W.

4. Considere la siguiente elipse

$$10x^2 + 6xy + 2y^2 = 4$$

   (i) Encuentre una matriz simétrica A mediante la cual pueda escribir la eplise dada como un producto matricial, usando (x, y) y $(x, y)^T$. Escriba la ecuacion de la eplise como dicho producto matricial.

   (ii) Diagonalice ortonormalmente la matriz A. Es decir encuentre D matriz diagonal y C matriz ortogonal tal que $A = CDC^{-1}$. Debe decir explicitamente quienes son estas matrices.

   (iii) La matriz C representa alguna transformación lineal conocida? Explique.

   (iv) La matriz C representa un cambio de coordenadas, entre que bases?

   (v) Mediante la sustitución

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

   encuentre una ecuación de la eplise dada que pueda pintar (en las nuevas coordenadas) y finalmente haga un MUY BUEN DIBUJO donde se muestre la elipse, sus nuevas coordenadas, el eje mayor de la elipse...

ÁLGEBRA LINEAL

CUARTO EXAMEN PARCIAL.

[redacted]

Instrucciones. Justifique completamente sus respuestas. El examen es individual.
El valor de cada ejercicio es 1,3 para un total de 5,2. Sin embargo la nota máxima no excederá 5,0.
Tiempo: 1 hora 15 minutos.

1. Considere W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los siguientes vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   a) Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a estos dos vectores para obtener una base ortonormal de W. Verifique su respuesta (compruebe que la base obtenida es ortonormal).
   b) Halle P la matrix de proyección sobre W.
   c) W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. Cuál es la dimensión de $W^{\perp}$? (Justifique!).

2. En las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

   halle la matriz de transición C tal que $(\mathbf{v})_{B_2} = C(\mathbf{v})_{B_1}$. Use lo anterior para hallar las componentes del vector v, con $v_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, en la base B_2.

3. Usando las bases B_1 y B_2 del ejercicio anterior. Halle la matrix de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

   respecto a las bases B_1 (en el espacio de salida) y B_2 (en el espacio de llegada).

4. Conteste la parte *a*) y escoja **solo uno** entre *b*) y *c*):
   a) Encuentre un ejemplo de una matrix 2×2, distinta de la matrix identidad, que sea antisimétrica y ortogonal.
   b) Demuestre que si Q es una matriz antisimétrica ortogonal, entonces $Q^2 = -Id$.
   c) Demuestre que el producto de dos matrices ortogonales es una matrix ortogonal.

Universidad de los Andes Departamento de Matemáticas

Parcial 3 de Algebra Lineal. Abril 17 de 2009.

[redacted]

1. Considere el subespacio de $\mathbb{R}^4$, $H = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x = y, w = 3y\right\}$ y
   $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^4$.

   a) Encuentre una base ortogonal para H y para su complemento ortogonal $H^{\perp}$.

   b) Escriba $v = h + p$ con $h \in H$ y $p \in H^{\perp}$.

2. Considere la aplicación $T : P_{\leq 2} \to P_{\leq 2}$, definida por $T(p(x)) = xp'(x)$.

   a) Mostrar que T es una transformación lineal.

   b) Halle la matriz estandar de representación de la transformación T.Halle el kernel y la imagen de T, así como el rango y la nulidad de T.

   c) Sean $B = \left\{1, x, x^2\right\}$ y $B' = \left\{1, x-1, x^2-1\right\}$. Halle la matriz de cambio $C_{B,B'}$.

   d) Halle la matriz de representación de T, $R_{B'}$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Diga si la matriz A es diagonalizable. Si lo es, encuentre C que la diagonalice.

Parcial 1, Algebra Lineal, MATE 1105

[redacted]

Noviembre 13, 2009

1) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los valores propios de A y para cada valor propio una base del espacio propio correspondiente. Es A diagonalizable? (Justificación requerida.) En caso afirmativo encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC$ es diagonal.

2) Compute el área del paralelogramo con vertices $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$ y $(4, 5)$.

3) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Usa la regla de Cramer para resolver $Ax = b$.

SUERTE!

Third Partial Exam for Algebra Lineal 1

Version B

[redacted]

Nov 13 2009

This exam is worth 15% of the final mark. The number in brackets indicate the points each exercise is worth. The maximal number of points is 30. You obtain your mark by dividing the points you receive by 6.
This exam continues on the second page!

Exercise 1:[4pts] Let $a = (3, 2, 1)^t, b = (-1, 2, -1)^t$ and $c = (1, 1, 2)^t$ be vectors in $\mathbb{R}^3$. Compute the volume of the parallelotope spanned by a, b and c.

Exercise 2:[4pts] Let a, b and c be vectors in $\mathbb{R}^3$. Find the equation that relates the terms $(c \times a) \cdot b$ and $(a \times b) \cdot c$ and prove it.

Exercise 3:[22pts] This exercise continues on the second page!
Let $V = \operatorname{im} B$ where $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ is the following matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

1. [2pt] Find the dimension of V.
2. [1pt] Verify that $(2, 2, -1)^t = v_1$ and $(3, 4, 5)^t = v_2$ is a basis for V.
3. [2pts] Apply the Gram-Schmidt process to $\{v_1, v_2\}$ found in the previous part to find an orthonormal basis $\{w_1, w_2\}$ of V.
4. [2pts] What is the rank and the nullity of B^t? What is the dimension of $V^\perp$.
5. [2pts] Find an orthonormal basis $\{w_3, w_4, \ldots\}$ of $V^\perp$.
6. [1pts] What can you say about $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$? (Hint: It is a special kind of basis for what vector space?)
7. [2pts] Find the basis change matrix that changes from $\mathcal{B}$ to the standard basis. **Call this matrix K!!!**
8. [2pts] What can you say about M? (Hint: It has a special property! Which one?) Give a correct explanation of your answer.
9. [2pts] Find the basis change matrix that changes from the standard basis to $\mathcal{B}$. **Call this matrix L!!!**

10. [2pts] Let the matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

be the matrix representing a linear map where we use the basis $\mathcal{B}$ for source and target. What does this map, or the matrix, do geometrically?

11. [2pts] Find the projection matrix $P \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ that projects $\mathbb{R}^3$ onto V using the standard basis of $\mathbb{R}^3$ for source and target, i.e. the matrix with $\operatorname{im} P = V$ and $\ker P = V^{\perp}$. (Hint: Relate the matrices P, K, L and T in an equation.)

12. [2pts] Find the projection of $b = (-1, 2, -1)^t$ onto V.

Tercer parcial Algebra Lineal
MATE115 Sección 26

[redacted]

Abril 30 de 2009

Escoja 4 de los 5 ejercicios. Señale en esta hoja los puntos que conteste o sino califico los 4 primeros que encuentre.

Justifique plenamente sus respuestas. Respuesta sin justificación no tiene ningún valor.

Esta es una prueba individual. No se permite el uso de libros ni apuntes, ni el uso de calculadoras, celulares o reproductores de sonido.

1. Determine si es verdadero o falso, justificando plenamente su respuesta. Si es verdadero, demuéstrelo, si es falso, dé un contra-ejemplo.

   (a) Si A y B son matrices de 4 x 4 y det A = 2, det B = -1, entonces det(2AB) = -16

   (b) Si el vector $\vec{v}$ es un vector propio de la matriz A, entonces $\vec{v}$ también es un vector propio de la matriz A^2

2. Sea $W = \{[x, y, z] \mid -x - y + z = 0\}$, es decir un plano en R^3

   (a) Halle una base ortonormal para W

   (b) Determine $W^\perp$ (justifique claramente su respuesta)

   (c) Halle la proyección de $b = [0, 1, 0]$ sobre W

   (d) Descomponga b en la forma $b_W + b_{W^\perp}$

   (e) Halle una base ortonormal para R^3, diferente de la canónica. Muestre que es base y que es ortogonal

3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Demuestre que 1 y 3 son valores propios de A

   (b) Calcule las multiplicidades geométrica y algebraica de los valores propios

   (c) Es A diagonalizable? Si lo es, encuentre la matriz C invertible y la matriz D diagonal que la diagonalizan

4. Sean $B = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \}$ y $B' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ dos bases de R^3.
   Determine la matriz de cambio de base C de la base B a la base B' y encuentre las coordenadas del vector $\vec{v_B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ en la base B' $(\vec{v_{B'}})$

5. Sea $B = 1/3 \begin{pmatrix} b & a & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix}$

   Encontrar a y b para que Q sea una matriz ortogonal.

ÁLGEBRA LINEAL

TERCER EXAMEN PARCIAL. TEMA A

[redacted]

Instrucciones. El examen es individual, el puntaje de cada numeral está indicado al inicio de este. Los siguientes problemas requieren demostración o justificación completa. Respuestas sin justificación no obtendrán un puntaje superior al 10 %.

Tiempo: 1 hora 30 minutos.

1. (18 pts). Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Demuestre que los valores propios de A son -1 y 2. Dé la multiplicidad algebráica de cada uno de éstos.
   b) Encuentre el espacio propio de cada valor propio de A. Es decir, encuentre E_{-1} y E_2. Cuáles son sus dimensiones? Cuál es la multiplicidad geométrica de cada valor propio? Tenga cuidado con los signos, recuerde que $-- = +$.
   c) Es A diagonalizable? Si lo es, encuentre una matrix C invertible y una matrix D diagonal que diagonalizen a A.

2. (9 pts) Considere los siguientes vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a w_1, w_2 y w_3 para obtener u_1, u_2 y u_3 ortonormales. Conserve el orden de los vectores.

3. (15 pts) Considere el siguiente subespacio W de $\mathbb{R}^3$:

$$W = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

   a) Encuentre P_W la matrix de proyección sobre W. Escriba $P_W v$, para $v \in \mathbb{R}^3$
   b) Encuentre $\ker(P)$, note que $\ker(P) = W^{\perp}$.
   c) Si $v \in W$, qué es $P_W v$? qué es $P_{W^{\perp}} v$? Justifique.

4. (8 pts) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{5\times 5}$, sea $\det(A) = 3$ y $\det(B) = 4$. Calcule los siguientes determinantes:
   a) $\det(A^3)$
   b) $\det(3A)$
   c) $\det(2B^2A^{-3})$
   d) Qué puede decir acerca de $\det(2A - B)$?

5. (**Bono 4 pts. Todo o nada**) Demuestre que si Q_1, Q_2 son ortogonales, entonces $Q_1^t Q_2$ es ortogonal.

MATE-1105: Algebra lineal

Tercer Parcial

Código: ________________ Nombre: ____________________________

Problema 1	Problema 2	Problema 3	Sum

Resuelva las siguientes preguntas (sin desarrollo sus respuestas no valen!). Escriba ordenadamente y devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Por favor solo hacer preguntas que tengan relacion con el enunciado. Unicamente se responderan estas preguntas en los primeros 20 minutos del examen.

1. Verdadero o falso que si A es una matriz $n \times n$ ortogonal y simetrica entonces A es la matriz identidad? Sin desarollo su respuesta no vale! 2 puntos

2. Sea P_2 el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 2. Sean 13 puntos

$$B_p = \{1, x, x^2\}, \qquad B_p^{'} = \{1, 1-x, 1+x+x^2\}$$

dos bases de P_2 donde B_p es la base estandard de P_2. Ademas sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio de todas las matrices reales 2×2. Sean

$$B_M = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\},$$

$$B_M^{'} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\},$$

dos bases de $M_2(\mathbb{R})$ donde B_M es la base estandard. Sea $T : P_2 \longrightarrow M_2$ transformacion lineal definida por

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} 2a_0 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 - 2a_0 \end{bmatrix}$$

donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

   (a) Encuentre la matriz de transformacion $C_{B_p \to B_p'}$ 2 puntos

   (b) Si $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ encuentre los vectores coordenadas $[p(x)]_{B_p}$ y $[p(x)]_{B_p'}$ 2 puntos

   (c) Encuentre la representacion matricial estandard R de $T : P_2 \longrightarrow M_2$ donde B_p es la base de P_2 y B_M la base de M_2. 3 puntos

   (d) Encuentre la representacion matricial de $T : P_2 \longrightarrow M_2$ donde $B_p^{'}$ es la base de P_2 y $B_M^{'}$ es la base de M_2. 4 puntos

   (e) Si $q(x) = 1 - x + x^2$ encuentre el vector coordenada $[T(q(x))]_{B_M'}$ donde $B_p^{'}$ es la base de P_2. 2 puntos

3. Sea $W = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Sea $W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W. Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la transformacion lineal que projecta vectores de $\mathbb{R}^3$ sobre $W^{\perp}$ encuentre la representacion matricial de T. 3 puntos

Álgebra Lineal

Tercer Examen Parcial

30 de marzo de 2009

[redacted]

Instrucciones. El examen es individual, el puntaje de cada numeral está indicado al inicio de este. Los siguientes problemas requieren demostración o justificación completa. Respuestas sin justificación no obtendrán un puntaje superior al 10 %.

Tiempo: 1 hora 10 minutos.

1. (1 pt.) Sean $v_1 = [4, 1, 3]$ y $v_2 = [-2, 0, 5]$ vectores en $\mathbb{R}^3$
   - *a*) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$ perpendicular a v_1 y v_2.
   - *b*) Calcule el area del paralelogramo en R^3 determinado por v_1 y v_2
2. (1 pt.) Calcule el determinante de la siguiente matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   Escriba los pasos que usados. Sea T la transformación lineal asociada a A. Qué significado geométrico tiene $|\det(A)|$?

3. (2 pts). Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - *a*) Halle los valores propios de A. (No se asuste si un valor propio es nulo).
   - *b*) Para cada valor propio encuentre un vector propio.
   - *c*) Escriba la matrix C cuyas columnas son los vectores propios de A y halle su inversa.
   - *d*) Muestre la matriz diagonal D semejante a A. Compruebe que $A = CDC^{-1}$
4. (1 pt.) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{5\times5}$, sea $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Calcule los siguientes determinantes:
   - *a*) $\det(A^{-4})$
   - *b*) $\det(4A)$
   - *c*) $\det(\operatorname{adj}(A))$
   - *d*) $\det(2B^2A^{-3})$

   Se puede decir algo acerca de $\det(A + 5B)$?