CÁLCULO VECTORIAL-PARCIAL 3.

Nombre:

1 (10 pts). Encuentre el volumen del sólido bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.

2 (10 pts). Calcule la integral

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \, dzdxdy$$

usando coordenadas esféricas.

3 (10 pts).

a (7 pts). Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(t) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ al mover una partícula a lo largo del cuarto de círculo $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

b (3 pts). Considere un resorte descrito por la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

que tiene una densidad lineal (masa por unidad de longitud) en el punto (x, y, z) proporcional a la altura sobre el plano $z = 0$. Calcule la masa total del resorte.

4 (6 pts). Considere el campo de "fuerza" en el plano dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j};$$

esto es, si una partícula de masa $m = 1$ está situada en el punto (x, y) siente una fuerza igual a $\mathbf{F}(x, y)$.

a (4 pts). Halle las ecuaciones de Newton para la trayectoria de una partícula sujeta al campo $\mathbf{F}$.

b (2 pts). Resuelva las ecuaciones para una partícula que parte del reposo en el punto $(0, 1)$.

Mate 1207–27–Cálculo Vectorial

1. Evalúe la integral despues de invertir el orden de integración

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$$

[Valor:1.0]

2. Halle el volumen de sólido dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, encima del plano xy y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

[Valor:2.0]

3. Halle el área de la superficie S sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que se encuentra dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$. Muestre que las dos superficies se cortan a una altura $z = 3$. Bosqueje la figura.

[Valor:2.0]

TIEMPO: 55 MINUTOS
NO SE PERMITE EL USO DE APUNTES, TEXTOS, CALCULADORAS NI CELULARES.

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad."

MATE 1207 - Cálculo vectorial

Ejercicio 1 (3 puntos)

Sea P la región de $\mathbb{R}^3$ delimitada por el parabolóide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano de ecuación $z = 4$. Mostrar que

$$\iiint_P \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \frac{128\pi}{15}.$$

Sugerencia: se podrá dibujar la región P y aplicar el teorema de Fubini.

Ejercicio 2 (3 puntos)

Sea $R > 0$. Mostrar que el volumen de la bola

$$B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

de centro $(0, 0, 0)$ y de radio R es

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Sugerencia: se podrá utilizar coordenadas esféricas en una integral triple bien escogida.

Ejercicio 3 (4 puntos)

Se propone estudiar la función

$$f : (x, y) \longmapsto 4x - 2x^2 - 2y^2$$

sobre la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

1. Justificar que f tiene un máximo global y un mínimo global sobre D (1 punto).
2. Se escribe $D = A \cup B$ donde
   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 25\}$$
   y
   $$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}.$$
   a) Mostrar que f tiene un máximo local sobre A (1 punto).
   b) Hallar el máximo global y el mínimo global de f sobre B (1 punto).
   c) Concluir (1 punto).