Fundamentos de Matemáticas

Alexander Cardona
Universidad de Los Andes

Mayo de 2009

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

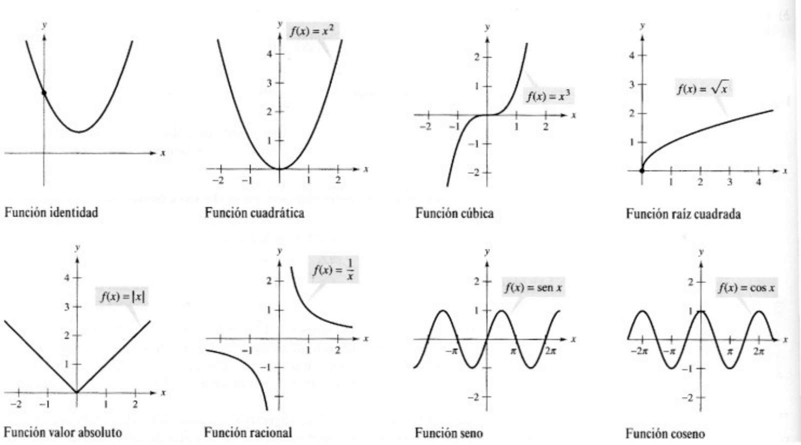
Funciones y operaciones comunes en el cálculo en una variable

Una función es una forma de comparar, sin ambigüedad, dos conjuntos. Se escribe $f : A \to B$ para decir que la función f asocia a cada elemento de el conjunto A un único elemento del conjunto B, y

$$f(a) = b$$

para especificar lo anterior.
En cálculo el conjunto natural con el que trabajaremos es $\mathbb{R}$, el conjunto de números reales, y las funciones con las que trabajaremos estarán determinadas por las operaciones naturales entre números reales: Suma, resta, multiplicación, división, etc.

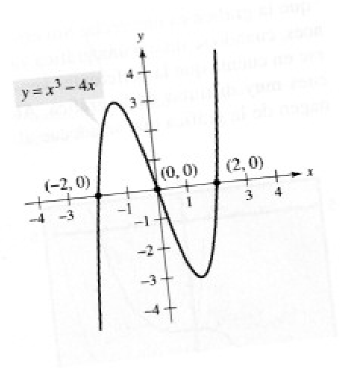
Entre las funciones que vamos a estudiar se encuentran las siguientes:



En las gráficas anteriores la coordenada y está definida por la variable x según una función f, lo que se expresa escribiendo

$$y = f(x).$$

La función determina entonces una curva en el plano cartesiano, y el objeto del cálculo es estudiar operaciones que determinen las propiedades más importantes de las funciones de este tipo.

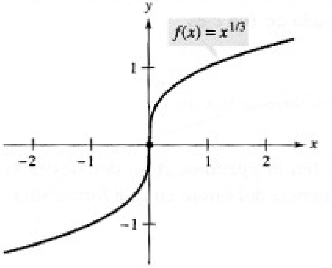


Así, por ejemplo, la gráfica que corresponde a la función $f(x) = x^3 - 4x$ es la que se encuentra al lado, en ella se señalan los puntos de corte de la curva que representa tal función en el plano con el eje x.

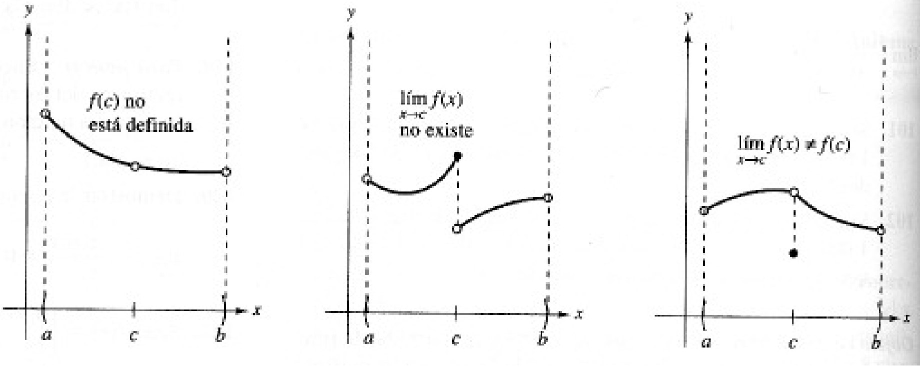
Contenidos

Una función $f(x)$ es llamada continua en un punto $p \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = f(p).$$

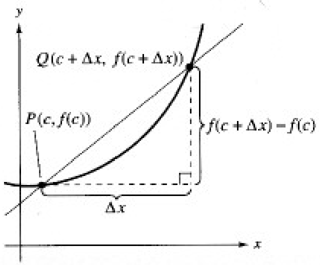


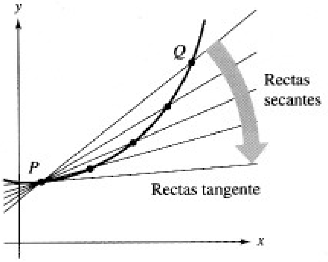
La figura a la izquierda ilustra una función continua en todo punto. La siguiente figura ilustra diferentes tipos de discontinuidad.

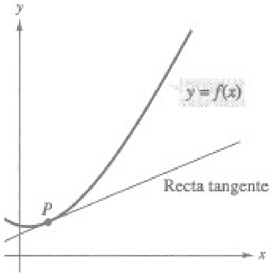

y
$f(c)$ no
está definida
x
a
c
b
y
$\lim_{x \to c} f(x)$
no existe
x
a
c
b
y
$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$
x
a
c
b

La derivada de una función f en el punto $x \in \mathbb{R}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva asociada a f en el punto x. Esta puede calcularse mediante el límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$







Significado

La derivada de una función en un punto mide su "rapidez de cambio" en tal punto, y es la herramienta fundamental en cálculo para estudiar la idea de variación.

Usando directamente la definición anterior es facil concluir que las siguientes reglas de derivación aplican para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante $\Rightarrow f'(x) = 0$.

Derivadas de las funciones más importantes

Usando directamente la definición anterior es facil concluir que las siguientes reglas de derivación aplican para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante $\Rightarrow f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq 0 \Rightarrow f'(x) = akx^{k-1}$.

Derivadas de las funciones más importantes

Usando directamente la definición anterior es facil concluir que las siguientes reglas de derivación aplican para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante $\Rightarrow f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq 0 \Rightarrow f'(x) = akx^{k-1}$.
3. Si $f(x) = \text{sen}x$ es la función seno $\Rightarrow f'(x) = \cos x$.
4. Si $f(x) = \cos x$ es la función coseno $\Rightarrow f'(x) = -\text{sen}x$.

Derivadas de las funciones más importantes

Usando directamente la definición anterior es facil concluir que las siguientes reglas de derivación aplican para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante $\Rightarrow f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq 0 \Rightarrow f'(x) = akx^{k-1}$.
3. Si $f(x) = \text{sen}x$ es la función seno $\Rightarrow f'(x) = \cos x$.
4. Si $f(x) = \cos x$ es la función coseno $\Rightarrow f'(x) = -\text{sen}x$.
5. Si $f(x) = e^x$ es la función exponencial $\Rightarrow f'(x) = e^x$.

Derivadas de las funciones más importantes

Usando directamente la definición anterior es facil concluir que las siguientes reglas de derivación aplican para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante $\Rightarrow f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq 0 \Rightarrow f'(x) = akx^{k-1}$.
3. Si $f(x) = \text{sen} x$ es la función seno $\Rightarrow f'(x) = \cos x$.
4. Si $f(x) = \cos x$ es la función coseno $\Rightarrow f'(x) = -\text{sen} x$.
5. Si $f(x) = e^x$ es la función exponencial $\Rightarrow f'(x) = e^x$.
6. Si $f(x) = \ln x$ es la función logarítmica $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$.

Las derivadas de las demás funciones usuales se puede obtener a partir de las derivadas anteriores siguiento las siguientes reglas:

1. Derivada de una suma: Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow$

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Las derivadas de las demás funciones usuales se puede obtener a partir de las derivadas anteriores siguiento las siguientes reglas:

1. Derivada de una suma: Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow$
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$
2. Derivada de un producto: Si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \Rightarrow$
$$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x).$$

Las derivadas de las demás funciones usuales se puede obtener a partir de las derivadas anteriores siguiento las siguientes reglas:

1. Derivada de una suma: Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow$
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$
2. Derivada de un producto: Si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \Rightarrow$
$$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x).$$
3. Derivada de un cociente: Si $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \Rightarrow$
$$f'(x) = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Regla de la Cadena

Si la función f es una composición de dos funciones g y h, es decir $f(x) = g(h(x))$, y escribimos $u = h(x)$, entonces

$$f'(x) = g'(u) \cdot h'(x).$$

Ejemplo

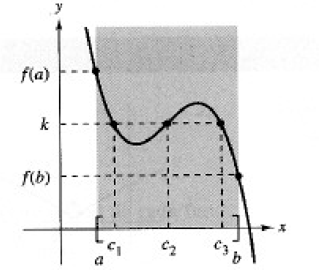
Sea $f(x) = (x^3 + 2)^5$, *entonces* f *es composición de las funciones* $g(x) = x^5$ *y* $h(x) = x^3 + 2$, *luego*

$$f'(x) = 5(x^3 + 2)^4 \cdot (3x^2) = 15x^2(x^3 + 2)^4.$$

Teorema (del valor Medio)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto en (a, b), entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

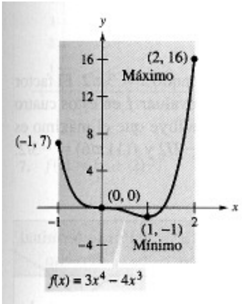
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



La figura a la izquierda ilustra el teorema de valor medio: Existe un punto $c \in (a, b)$ donde la recta tangente a la curva es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Teorema (del valor Extremo)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre el intervalo.



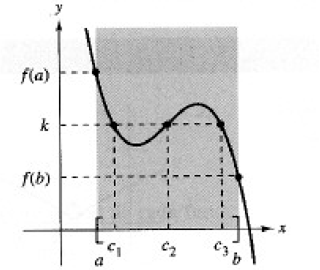
La figura a la izquierda ilustra el teorema del valor extremo: Existen puntos c y $d \in [a, b]$ tales que

$$f(c) \geq f(x) \geq f(d)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Teorema (del valor Intermedio)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y c y $d \in [a, b]$ son los puntos en los cuales f alcanza sus máximo y mínimo, respectivamente, entonces si $f(c) \geq k \geq f(d)$ existe $e \in [a, b]$ tal que $f(e) = k$.



La figura a la izquierda ilustra el teorema de valor intermedio: Existe un punto $e \in [a, b]$ donde se alcanza cualquier valor entre $f(c)$ y $f(d)$.

Si f es una función continua en todo punto en su dominio de definición, entonces

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a).$$

Si f y g son dos funciones y el límite $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado, el siguiente teorema da una alternativa para calcularlo.

Teorema (de L'Hôpital)

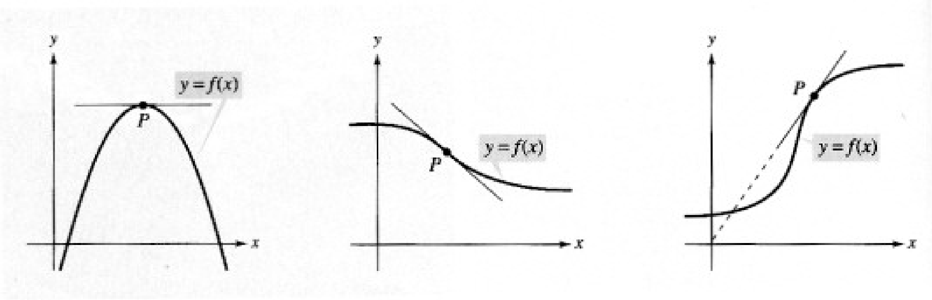
$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{sen\, x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Usando la derivada para estudiar el comportamiento de una curva

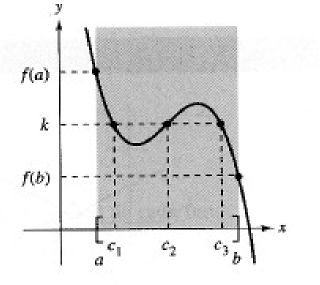
Si f es una función (así solo sea continua a trozos) es posible usar la derivada de f para hacer un boceto muy preciso de la curva asociada. Primero que todo, es facil observar que el signo de la derivada de f indica si la función es creciente ($f'(x) > 0$), decreciente ($f'(x) < 0$) e identificar los lugares en los que se ubican los puntos críticos –máximos y mínimos– ($f'(x) = 0$):



La segunda derivada indica si la derivada crece, decrece o permanece estable, es decir si la rapidez de crecimiento dada por f aumenta, decrece o permanece constante. Un punto x donde

$$f''(x) = 0$$

es llamado punto de inflexión, la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en aquellos puntos donde $f''(x) > 0$ y la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en aquellos puntos donde $f''(x) < 0$.



Por ejemplo, en la curva a la izquierda es cóncava hacia arriba entre c_1 y c_2, es cóncava hacia abajo entre c_2 y c_3 y hay cambio de concavidad en c_2.

Contenidos

La antiderivada de una función

Una antiderivada para una función $f(x)$ es una función cuya derivada sea la función $f(x)$. La antiderivación se denota por el símbolo $\int f(x)dx$, más adelante veremos de donde viene tal notación.

Ejemplo

Si $f(x) = x^2$, *entonces*

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

donde C *es una constante. Para verificarlo solo hace falta derivar* $\frac{x^3}{3} + C$, *lo que en efecto da* x^2.

Antiderivadas de las funciones más importantes

Usando las reglas de derivación vistas anteriormente tenemos la siguiente lista de antiderivadas para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = k$ es una función constante $\Rightarrow \int k\,dx = kx + C$.

Antiderivadas de las funciones más importantes

Usando las reglas de derivación vistas anteriormente tenemos la siguiente lista de antiderivadas para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = k$ es una función constante $\Rightarrow \int k\,dx = kx + C$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq -1 \Rightarrow$
   $\int ax^k\,dx = \frac{ax^{k+1}}{k+1} + C$.

Antiderivadas de las funciones más importantes

Usando las reglas de derivación vistas anteriormente tenemos la siguiente lista de antiderivadas para las funciones mas comunmente usadas:

1. Si $f(x) = k$ es una función constante $\Rightarrow \int k\,dx = kx + C$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq -1 \Rightarrow$
   $\int ax^k\,dx = \frac{ax^{k+1}}{k+1} + C$.
3. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función seno $\Rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
4. Si $f(x) = \cos x$ es la función coseno $\Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

Antiderivadas de las funciones más importantes

Usando las reglas de derivación vistas anteriormente tenemos la siguiente lista de antiderivadas para las funciones mas comunmente usadas:

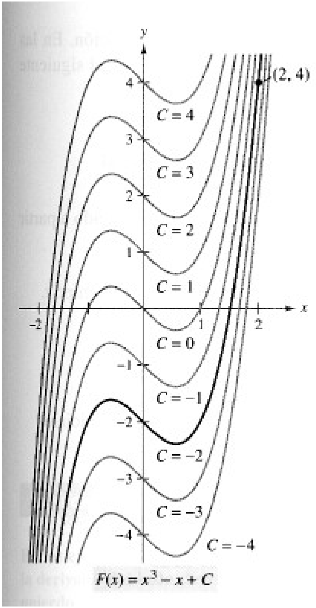
1. Si $f(x) = k$ es una función constante $\Rightarrow \int k\,dx = kx + C$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq -1 \Rightarrow$ $\int ax^k\,dx = \frac{ax^{k+1}}{k+1} + C$.
3. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función seno $\Rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
4. Si $f(x) = \cos x$ es la función coseno $\Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.
5. Si $f(x) = e^x$ es la función exponencial $\Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + C$.

Antiderivadas de las funciones más importantes

Usando las reglas de derivación vistas anteriormente tenemos la siguiente lista de antiderivadas para las funciones mas comunmente usadas:

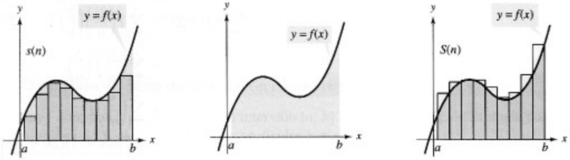
1. Si $f(x) = k$ es una función constante $\Rightarrow \int k\,dx = kx + C$.
2. Si $f(x) = ax^k$ es una función polinomial y $k \neq -1 \Rightarrow$ $\int ax^k\,dx = \frac{ax^{k+1}}{k+1} + C$.
3. Si $f(x) = \mathrm{sen} x$ es la función seno $\Rightarrow \int \mathrm{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
4. Si $f(x) = \cos x$ es la función coseno $\Rightarrow \int \cos x\,dx = \mathrm{sen} x + C$.
5. Si $f(x) = e^x$ es la función exponencial $\Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + C$.
6. Si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, es decir la función logarítmica .

Así, como la constante que acompaña las funciones a la derecha en la tabla anterior es arbitraria, la antiderivación no da lugar a una sola función, sino a una familia de funciones:



Definición

Dada una función $f(x)$ definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, la integral de $f(x)$ entre a y b es el área bajo la curva de la función en el plano entre tales puntos (ver figura). Denotamos tal área como $\int_a^b f(x)\, dx$.



El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región

Área de la región

El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

En la figura

$$s(n) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S(n)$$

El Teorema Fundamental del Cálculo

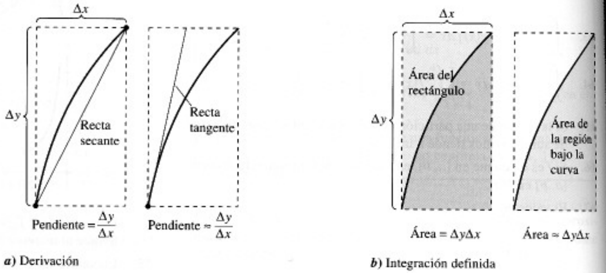
El Teorema Fundamental del Cálculo permite calcular integrales definidas (es decir, áreas) apartir de antiderivadas, mediante una sencilla evaluación:

Teorema

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en tal intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La gráfica ilustra la relación entre derivar e integrar que aparece en el Teorema Fundamental del Cálculo:

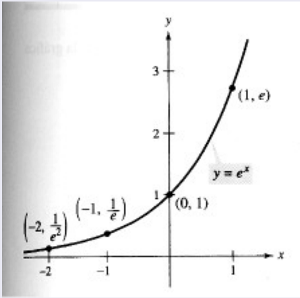


Ejemplo

Calcular el área bajo la curva $f(x) = e^x$ *entre* $x = -2$ *y* $x = 1$.

Debemos calcular la integral $\int_{-2}^{1} e^x \, dx$ *y, por el teorema anterior, sabemos que*

$$\int_{-2}^{1} e^x \, dx = e^x \mid_{-2}^{1} = e^1 - e^{-2} = e - \frac{1}{e^2}.$$



Tablas

Por supuesto, para poder calcular integrales hay que conocer una buena cantidad de antiderivadas, en la tabla se indican las mas importantes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int du = u + C$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$$

Y, para calcular integrales más complicadas, hay que hacer uso de técnicas de integración que provienen principalmente del uso en antiderivación de la Regla de la Cadena, las Reglas del Producto y del Cociente para derivadas, conocidas como:

1. Sustitución:

Y, para calcular integrales más complicadas, hay que hacer uso de técnicas de integración que provienen principalmente del uso en antiderivación de la Regla de la Cadena, las Reglas del Producto y del Cociente para derivadas, conocidas como:

1. Sustitución:
2. Integración por partes:

Y, para calcular integrales más complicadas, hay que hacer uso de técnicas de integración que provienen principalmente del uso en antiderivación de la Regla de la Cadena, las Reglas del Producto y del Cociente para derivadas, conocidas como:

1. Sustitución:
2. Integración por partes:
3. Sustitución Trigonométrica:

Y, para calcular integrales más complicadas, hay que hacer uso de técnicas de integración que provienen principalmente del uso en antiderivación de la Regla de la Cadena, las Reglas del Producto y del Cociente para derivadas, conocidas como:

1. Sustitución:
2. Integración por partes:
3. Sustitución Trigonométrica:
4. ... Y muchos más... (ver bibliografía)

Contenidos

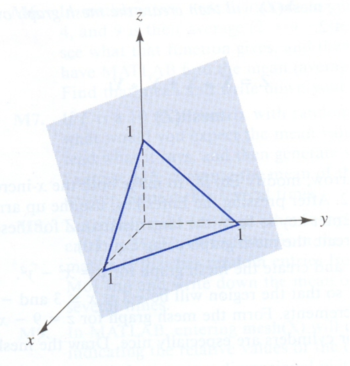
Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal en n variables es una ecuación de la forma

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = a,$$

donde los coeficientes $r_1, \ldots, r_n, a \in \mathbb{R}$ son conocidos y las variables $x_1, \ldots, x_n$ son llamadas incógnitas.

Cada ecuación lineal representa un lugar geométrico. Por ejemplo, la ecuación $x + y + z = 1$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$:



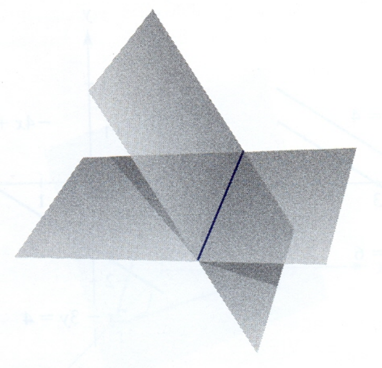
Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables es una colección de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ son números reales conocidos para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ y $0 \leq k \leq m$.

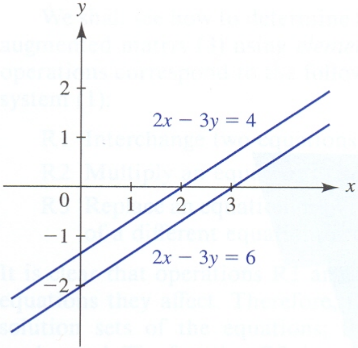
Tener varias ecuaciones lineales es tener varios lugares geométricos en $\mathbb{R}^n$, y queremos usar el álgebra matricial para estudiarlos. Por ejemplo, dos ecuaciones lineales "diferentes" en $\mathbb{R}^3$ representan dos planos cuaya intersección es una recta:

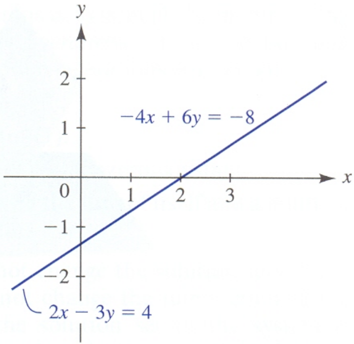


Solucionar el sistema significa encontrar tal recta...

... pero, aunque pueden existir soluciones, también puede pasar que no existan soluciones, o que existan infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 4 \\ 2x - 3y &= 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = & 4 \\ -4x + 6y & = -8 \end{cases}$$





Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

puede escribirse en forma compacta en notación matricial como $A\vec{x} = \vec{b}$, donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Vamos a definir, a partir de la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$, una matriz aumentada y una serie de operaciones elementales que nos permitirán encontrar las soluciones al sistema (en caso de que existan). Este método es conocido como reducción de Gauss-Jordan.

Definición

La matriz aumentada asociada al sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

que escribiremos en forma abreviada como $(A\,|\,\vec{b})$.

Como indicamos en un ejemplo anterior, multiplicar por un escalar una ecuación lineal no modifica el lugar geométrico que representa (las rectas definidas por $2x - 3y = 4$ y $-4x + 6y = -8$ son la misma). En general, dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

hay dos operaciones elementales que no alteran el lugar geométrico definido por ellas:

Operaciones Elementales

1. Multiplicar una ecuación por un escalar (diferente de cero),

Como indicamos en un ejemplo anterior, multiplicar por un escalar una ecuación lineal no modifica el lugar geométrico que representa (las rectas definidas por $2x - 3y = 4$ y $-4x + 6y = -8$ son la misma). En general, dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

hay dos operaciones elementales que no alteran el lugar geométrico definido por ellas:

Operaciones Elementales

1. Multiplicar una ecuación por un escalar (diferente de cero),
2. Sumar (un múltiplo de) una ecuación del sistema con (un múltiplo de) otra.

Las operaciones descritas anteriormente dan lugar, en la notación de matriz aumentada para el sistema, a las siguientes operaciones elementales entre filas:

Operaciones elementales entre filas

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Las siguientes son las operaciones elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera,

Las operaciones descritas anteriormente dan lugar, en la notación de matriz aumentada para el sistema, a las siguientes operaciones elementales entre filas:

Operaciones elementales entre filas

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Las siguientes son las operaciones elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera,
2. Multiplicar una fila por un escalar (diferente de cero),

Las operaciones descritas anteriormente dan lugar, en la notación de matriz aumentada para el sistema, a las siguientes operaciones elementales entre filas:

Operaciones elementales entre filas

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz aumentada

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Las siguientes son las operaciones elementales entre filas:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera,
2. Multiplicar una fila por un escalar (diferente de cero),
3. Sumar (un múltiplo de) una fila con (un múltiplo de) otra.

Ejemplo

Para ilustrar las operaciones elementales entre filas, y su efecto sobre los sistemas de ecuaciones lineales, obsérvese que para encontrar el punto de intersección entre las rectas $\ell_1 : 2x - y = 0$ *y* $\ell_2 : x + y = 3$ *en el plano, es decir un punto* $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ *cuyas coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones, podemos sumar ambas ecuaciones para obtener*

$$3x = 3,$$

luego $x_o = 1$ *y, de la ecuación de* ℓ_2*, tenemos que* $y_o = 2$.
En términos de la matriz aumentada asociada al sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

tenemos

Ejemplo (continuación)

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

y, haciendo tres operaciones elementales, obtenemos

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{3} \times F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (I\,|\,\vec{a}),$$

donde el vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *tiene como componentes las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas* ℓ_1 *y* ℓ_2*, es decir la solución al sistema.*

Lo anterior no es sino una ilustración del siguiente

Teorema

Si dos matrices aumentadas $(A\,|\vec{b})$ y $(B\,|\vec{a})$, correspondientes a dos sistemas de ecuaciones lineales, son equivalentes bajo operaciones elementales entre filas, entonces los sistemas de ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones.

Dado que (cuando hay tantas ecuaciones como incógnitas) la solución a un sistema de ecuaciones se escribe mediante la matriz identidad aumentada

$$(I\,|\vec{a}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{array}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{c} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n \end{array}$$

el objetivo al hacer operaciones elementales entre filas, en una matriz aumentada, será lograr una matriz lo más parecida posible a la matriz identidad. Llamaremos tal matriz escalonada por filas.

Definición

Una matriz está en forma escalonada por filas si:

1. *Todas las filas conteniendo solo ceros apareces bajo las filas que contienen entradas diferentes de cero.*
2. *La primera entrada diferente de cero en cualquier fila (llamada pivote) aparece en la columna a la derecha de la primera entrada no nula en cualquier fila anterior.*

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

No está en forma escalonada por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si está en forma escalonada por filas.

Reducción de Gauss-Jordan

Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, con matriz aumentada $(A|\vec{b})$, el método de reducción de Gauss-Jordan indica la forma más sencilla de encontrar las soluciones al sistema: encontrando una matriz aumentada escalonada por filas, a partir de la matriz $(A|\vec{b})$, y despejando cada incógnita en el número mínimo de variables libres.

Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + \quad -2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

cuya matriz aumentada asociada es

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).
$$

Ejemplo (continuación)

Haciendo operaciones elementales entre filas tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

que está en forma escalonada por filas. Las ecuaciones lineales correspondientes son

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

luego, de la segunda ecuación deducimos que $4x_2 = -3x_3$ *y, con tal resultado usado en la primera, tenemos que*

$$x_1 = 1 + 2x_3.$$

Ejemplo (continuación)

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_3 \\ x_2 &= -\frac{3}{4}x_3 \end{aligned}$$

y no es posible eliminar la variable libre x_3, que para cada valor real da lugar a una solución particular del sistema. Por ejemplo, para $x_3 = 4$, $x_1 = 9$ y $x_2 = -3$, luego $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ es una solución particular. La solución general del sistema es

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 \\ -\frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

En general, dado un sistema de ecuaciones lineales, el método de reducción de Gauss-Jordan nos conduce a tres posibilidades a la hora de buscar sus soluciones:

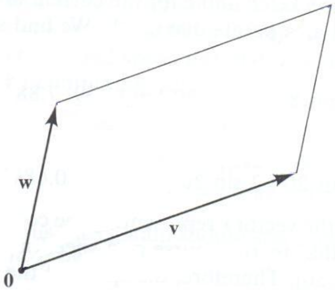
1. El sistema tiene una única solución
2. El sistema tiene infinitas soluciones
3. El sistema no tiene ninguna solución.

El siguiente teorema nos dice a qué tipo de resultado en la reducción corresponde cada una de estas situaciones.

Contenidos

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no paralelos en el plano $\mathbb{R}^2$, el paralelogramo generado por ellos es el que muestra la figura.
Para calcular el área de tal paralelogramo debemos conocer el ángulo θ entre los dos vectores, es decir el dado por

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta.$$



Si escribimos los vectores en componentes como $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, un cálculo sencillo muestra que el área del paralelogramo es

$$\mathcal{A} = | ad - cb | .$$

Es claro que, en caso de ser paralelos los vectores, digamos $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, para algún $r \in \mathbb{R}$, el área resultante será cero, pues $\mathcal{A} = \mid arb - rab \mid = 0$. Visto desde el punto de vista de los sistemas de ecuaciones lineales, lo anterior corresponde a decir si el sistema de ecuaciones

$$ax + cy = k$$

$$bx + dy = l$$

tiene solución única o infinitas soluciones ya que, como vimos en el primer capítulo, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tiene inversa solamente cuando $ad - bc \neq 0$ y en tal caso su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Veremos en este capítulo que esta relación, válida para matrices 2×2, entre la condición para la invertibilidad de una matriz cuadrada (es decir, para la existencia de soluciones únicas de ciertos sistemas de ecuaciones lineales) y la medida de una propiedad geométrica (el área) existe para matrices de tamaño arbitrario, y está dada a través un número llamado el determinante.

Definición

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *una matriz* 2×2 *arbitraria. Definimos el determinante de* A *como*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En otras palabras, un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ si y solo si el determinante de su matriz asociada A es diferente de cero y, adicionalmente, el valor absoluto del determinante es igual al área del paralelogramo formado por los vectores fila (o columna) de la matriz A.

Producto cruz

Supongamos ahora que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (no paralelos) no están en el plano sino en $\mathbb{R}^3$, y queremos calcular el área del paralelogramo generado por ellos. En este caso introduciremos una nueva operación entre vectores de $\mathbb{R}^3$, llamada producto vectorial o producto cruz, que asocia a dos vectores de $\mathbb{R}^3$ un nuevo vector en $\mathbb{R}^3$.

Definición

Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, *el **producto vectorial o producto cruz** de* $\vec{v}$ *con* $\vec{w}$ *es el vector*

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Para retener más facilmente la anterior definición podemos proceder de la siguiente forma. Acomodamos las componentes de los dos vectores en una matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

donde $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ denotan los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y después calculamos su "determinante" reduciéndolo al caso anterior de la forma siguiente

$$\vec{v} \times \vec{w} = \text{"det"} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= \hat{i} \det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} - \hat{j} \det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} + \hat{k} \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

obteniendo

$$\vec{v} \times \vec{w} = \hat{i}\,(v_2 w_3 - v_3 w_2) - \hat{j}\,(v_1 w_3 - v_3 w_1) + \hat{k}\,(v_1 w_2 - v_2 w_1)\,,$$

que es la misma expresión dada en la definición.

Propiedades del producto cruz

Teorema

El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^3$ es igual a $|\ \vec{v} \times \vec{w}\ |$.

Definición

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definimos el determinante de A de la siguiente forma: Sea $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ el cofactor *de a_{ij}, donde A_{ij} es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta al eliminar en A la fila i y la columna j. Entonces,*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Ejemplo

Contenidos

Contenidos