Parcial I – Álgebra Lineal

Septiembre 8 de 2008

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero justificando –matemáticamente– su respuesta.

(i) El conjunto $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

(ii) El conjunto $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

(iii) El conjunto $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

(4 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(i) Encuentre la inversa de A.

(ii) Use la inversa de A para encontrar la solución al sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

(6 Puntos) **III**. Considere la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre el espacio nulo de B, una base para el espacio nulo de B y su dimensión.

(ii) Encuentre el espacio imagen de B, una base para el espacio imagen de B y su dimensión.

(iii) Diga si el sistema de ecuaciones $B\vec{x} = \vec{d}$ tiene una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución para cada vector $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ (justifique su respuesta).

Solución

I. Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n\}$ es una *base* para un espacio V si es linealmente independiente y $V = \mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n\}$, y el número de elementos de una base cualquiera es la dimensión de V.

(i) Falso. Sabemos que $\mathbb{R}^3$ es un espacio de dimensión 3, luego cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ no pueden ser linealmente independientes. En efecto, formando la matriz aumentada cuyas columnas son los vectores de B_1 y reduciendo tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to -F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

luego solo hay tres vectores linealmente independientes (correspondientes a los tres pivotes), así que B_1 *no* puede ser base para $\mathbb{R}^3$.

(ii) Verdadero. El argumento anterior muestra que al reducir la matriz cuyas columnas son los vectores de B_2 obtenemos tres pivotes, así que tenemos tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, es decir una base.

(iii) Falso. El conjunto dado no genera a $\mathbb{R}^3$. Formando la matriz aumentada cuyas columnas son los vectores de B_3 y reduciendo tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego solo hay dos vectores linealmente independientes (correspondientes a los dos pivotes), podemos concluir que $\mathsf{Sp}B_3 \neq \mathbb{R}^3$ (de hecho, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathsf{Sp}B_3$), así que B_3 *no* puede ser base para $\mathbb{R}^3$.

II.

(i) Para encontrar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ formamos la matriz aumentada $(A|I)$ y tratamos de reducirla a la forma $(I|A^{-1})$, obteniendo la inversa de A a la derecha. (Obsérvese que las columnas de A son exactamente los vectores del conjunto B_2 del punto anterior, así que sabemos que la reducción produce tres pivotes, es decir que la matriz es invertible.) Haciendo operaciones elementales entre filas tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

luego la inversa de la matriz es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(ii) Dado que A es una matriz cuadrada invertible, para encontrar la solución al sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, multiplicando a izquierda a ambos lados por la inversa de A tenemos que:

$$A^{-1}A\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

luego, usando (1), tenemos que

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

III. (i) Por definición, el espacio nulo de B es $N_B = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\vec{x} = \vec{0}\right\}$, es decir, el conjunto de soluciones del sistema homogeneo de ecuaciones lineales $B\vec{x} = \vec{0}$ asociado al sistema:

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0. \end{cases}$$

Sin embargo, dado que las columnas de B son los cuatro vectores del conjunto B_1 del punto **I** (i), ya hemos hecho la reducción de Gauss-Jordan correspondiente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),$$

cuyas ecuaciones lineales correspondientes son

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0, \end{aligned}$$

luego, despejando en términos de x_4, tenemos que $x_1 = -3x_4$, $x_2 = -x_4$, $x_3 = 2x_4$ y, por lo tanto, la solución al sistema homogeneo es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3x_4 \\ -x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica que el espacio nulo de B es

$$N_B = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base y su dimensión es 1.

(ii) Por definición, el espacio imagen (o rango) de B es

$$R_B = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid B\vec{x} = \vec{y} \quad \text{para algún } \vec{x} \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

Dado que ya conocemos el número de pivotes en B, que es 3 según lo visto anteriormente, tomando las tres primeras columnas de la matriz, tenemos que

$$R_B = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3.$$

Como $R_B = \mathbb{R}^3$, podemos escoger cualquier base de $\mathbb{R}^3$, cuya dimensión es 3. Obsérvese que tal resultado está de acuerdo con la ecuación del rango:

$$\text{No. columnas de } A = 4 = \dim N_A + \dim I_A.$$

(iii) Consideremos el sistema de ecuaciones

$$B\vec{x} = \vec{d},$$

donde $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ es un vector arbitrario. Sabemos que el sistema es consistente porque las columnas de B generan el espacio $\mathbb{R}^3$, luego tenemos un sistema consistente con mas incógnitas que ecuaciones, asi que debe tener infinitas soluciones (que corresponden a las infinitas formas de combinar las cuatro columnas de B para formar el vector $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$).