Parcial $\mathrm{II}_{+\frac{1}{2}}$ – Álgebra Lineal 1

Octubre 14 de 2008

(15 Puntos) Considere los espacios vectoriales

$$P_2[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

y

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2 \right\},$$

con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares.

1. Demuestre que el conjunto $B_P = \{1, 1 - x, 1 + x - x^2\}$ es una base para $P_2[x]$.
2. Sea $q(x) = 3 + 2x + x^2 \in P_2[x]$. Calcule $[q(x)]_{B_P}$, es decir, escriba el vector $q(x)$ en coordenadas respecto a la base B_P.
3. Sea $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ el conjunto de matrices 2×2 simétricas. Es $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$? (Demuéstrelo.)
4. Sea $T : P_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación

   $$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 - a_1 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que T es una transformación lineal. Encuentre su núcleo (espacio nulo) y rango (espacio imagen).
5. Calcule la matriz M_T de la transformación respecto a las bases B_P para $P_2[x]$ y $B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ (base canónica) para $M_2(\mathbb{R})$.
6. Calcule $T(q(x))$ y verifique que

   $$[T(q(x))]_{B_C} = M_T \, [q(x)]_{B_P}.$$

Solución

1. El conjunto $B_P = \{1, 1-x, 1+x-x^2\}$ tiene tres elementos luego, dado que la dimensión de $P_2[x]$ es tres (su base canónica es $\{1, x, x^2\}$), es suficiente demostrar que los vectores son linealmente independientes —o que generan el espacio— para verificar que es una base. Vamos a verificar la independencia lineal, es decir, que si

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1+x-x^2) = 0,$$

entonces los escalares α_1, α_2 y α_3 deben ser todos cero. La ecuación anterior es una igualdad de polinomios, luego

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (-\alpha_2 + \alpha_3)x - \alpha_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2,$$

lo que implica que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \qquad -\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_3 = 0,$$

así que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$, luego los tres vectores son linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión tres y, en consecuencia, son una base.

2. Tomemos ahora el vector $q(x) = 3 + 2x + x^2 \in P_2[x]$, dado que $B_P = \{1, 1-x, 1+x-x^2\}$ es una base, existen escalares α_1, α_2 y α_3 tales que

$$q(x) = \alpha_1(1) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1+x-x^2).$$

Para calcular $[q(x)]_{B_P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, es decir, el vector $q(x)$ en la base B_P, tenemos que solucionar el sistema no homogeneo de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 3 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 & = & 2 \\ -\alpha_3 & = & 1. \end{array}$$

Así, tenemos que

$$[q(x)]_{B_P} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Para verificar que el conjunto de matrices 2×2 simétricas, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, tenemos que verificar que: *(i)* Si $A, B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ entonces $A+B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, *(ii)* Si $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
Para verificar *(i)* basta ver que $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ siempre que $A + B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ y, además, $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$, luego *(ii)* también se satisface y, en consecuencia, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$

4. Para demostrar que $T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 - a_1 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal de $P_2[x]$ en $M_2(\mathbb{R})$ debemos verificar que (i) $T(p(x) + p'(x)) = T(p(x)) + T(p'(x))$, para cualquier par de polinomios $p(x), p'(x) \in P_2[x]$, y (ii) $T(\alpha p(x)) = \alpha T(p(x))$ para cualquier polinomio $p(x) \in P_2[x]$ y cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $p'(x) = a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 \in P_2[x]$, entonces

$$\begin{aligned} T(p(x) + p'(x)) &= T((a_0 + a'_0) + (a_1 + a'_1)x + (a_2 + a'_2)x^2) \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a'_0 + a_1 + a'_1 & a_2 + a'_2 \\ a_2 + a'_2 & a_0 + a'_0 - a_1 - a'_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 - a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_0 + a'_1 & a'_2 \\ a'_2 & a'_0 - a'_1 \end{pmatrix} \\ &= T(p(x)) + T(p'(x)), \end{aligned}$$

luego la primera condición ha sido verificada.

(ii) Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2[x]$ y α es un escalar, entonces

$$T(\alpha p(x)) = T\left(\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2\right) = \begin{pmatrix} \alpha a_0 + \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_2 & \alpha a_0 - \alpha a_1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 - a_1 \end{pmatrix} = \alpha T(p(x))$$

luego T es una transformación lineal.

Finalmente, el espacio nulo de la transformación es el espacio

$$N_T = \{p(x) \in P_2[x] \mid T(p(x)) = 0\},$$

es decir el espacio solución al sistema homogeneo

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_0 - a_1 &= 0 \end{aligned}$$

luego $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, y $N_T = \{0\}$. Como la dimensión del espacio nulo es 0 y $\dim P_2[x] = 3$, la dimensión del espacio imagen es 3. De hecho, si $A \in M_2(\mathbb{R})$ está en la imagen de T, es decir $A = T(p(x))$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 - a_1 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $I_T = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

5. Tomando las bases $B_P = \{1, 1-x, 1+x-x^2\}$ para $P_2[x]$ y $B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ (base canónica) para $M_2(\mathbb{R})$, la matriz M de la transformación anterior respecto a tales bases se obtiene calculando la imagen de los vectores de B_P en coordenadas de B_C en $M_2(\mathbb{R})$, es decir,

$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)]_{B_C} & [T(1-x)]_{B_C} & [T(1+x-x^2)]_{B_C} \\ | & | & | \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Ahora,

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(1-x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T\left(1+x-x^2\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego, dado que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$[T(1)]_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y, de la misma forma

$$[T(1-x)]_{B_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \left[T\left(1+x-x^2\right)\right]_{B_C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

asi que, poniendo tales vectores en la matriz (1) tenemos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Un simple calculo permite verificar que

$$M\,[q(x)]_{B_P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [T\,(q(x))]_{B_C}.$$