Parcial III – Álgebra Lineal

Noviembre 10 de 2008

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

(i) El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Si las matrices A y B son similares, las matrices A^2 y B^2 también lo son.

(iii) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\det A = 1$.

(4 Puntos) **II**. Sea $W = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$. Encuentre el complemento ortogonal a W en $\mathbb{R}^3$ y la matriz P_W de proyección sobre tal plano.

(6 Puntos) **III**. Considere los espacios vectoriales

$$P_2[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

y

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2 \right\},$$

con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares. Sean B_P, B'_P, B_M y B'_M las siguientes bases para $P_2[x]$ y $M_2(\mathbb{R})$, respectivamente:

$$B_P = \left\{1, 1+x, 1+x+x^2\right\}, \qquad B'_P = \left\{1+x+x^2, 1+x, 1\right\},$$

$$B_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B'_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2[x]$ la transformación lineal

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{22}) + (a_{11} - a_{22})x + (a_{12} + a_{21})x^2.$$

(i) Encuentre la matriz de cambio de base $C_{B_P B'_P}$.

(ii) Encuentre la matriz de cambio de base $C_{B'_M B_M}$.

(iii) Si la matriz de la transformación respecto a las bases B_M y B_P es $[M_T]_{B_M}^{B_P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz de la transformación respecto a las bases B'_M y B'_P.

Solución

I. (i) Falso. El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *no* es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ ya que, aunque los vectores que lo forman son ortogonales, solo uno de ellos es unitario.

(ii) Verdadero. Si las matrices A y B son similares, entonces existe una matriz C invertible tal que

$$A = CBC^{-1},$$

luego

$$A^2 = (CBC^{-1})(CBC^{-1}) = CB^2C^{-1},$$

así que las matrices A^2 y B^2 también son similares.

(iii) Falso. Si $A^TA = AA^T = I$ entonces

$$1 = \det I = \det A^TA = \det A^T \det A = (\det A)^2,$$

luego $\det A = \pm 1$, luego la afirmación es falsa. Un contraejemplo fácil es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Sea $W = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$. Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W^\perp$ entonces $a + c = 0$, es decir que el complemento ortogonal a la recta W es el plano $W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Para encontrar la matriz P_W de proyección sobre tal plano, con la base encontrada formamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y, como vimos en clase,

$$P_W = A(A^TA)^{-1}A^T.$$

Primero,

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego

$$P_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

III. (i) Para encontrar la matriz de cambio de base $C_{B_P B'_P}$ de B_P a B'_P debemos escribir los vectores de tales bases como columnas en la siguiente matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

y reducirla hasta encontrar la matriz identidad al lado izquierdo. Haciendo la reducción encontramos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

luego $C_{B_P B'_P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) De forma similar, para encontrar la matriz de cambio de base $C_{B'_M B_M}$ usando el mismo método, al poner las bases correspondientes en la matriz aumentada observamos que no hay ninguna reducción por hacer, así que:

$$C_{B'_M B_M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Finalmente, para escribir la matriz de la transformación respecto a las bases B'_M y B'_P, en términos de la matriz de la transformación respecto a las bases B_M y B_P, podemos usar la ecuación

$$[M_T]_{B'_M}^{B'_P} = C_{B_P B'_P} [M_T]_{B_M}^{B_P} C_{B'_M B_M}.$$

Si $[M_T]_{B_M}^{B_P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, usando las matrices calculadas anteriormente, tenemos que la matriz de la transformación respecto a las bases B'_M y B'_P es

$$[M_T]_{B'_M}^{B'_P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Nótese, sin embargo, que la matriz de la transformación $[M_T]_{B_M}^{B_P}$ no corresponde con la dada en el enunciado y, en consecuencia $[M_T]_{B'_M}^{B'_P}$ no es la dada anteriormente tras el cambio de base. Las expresiones correctas son $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, respectivamente, *pero esto no hacía parte del cuestionario.*)