Quiz I – Álgebra Lineal

Agosto 20 de 2008

(3 Puntos) **I**.

(i) Encuentre los posibles valores de α para que el vector $\vec{x} = (1, \alpha, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ sea perpendicular al vector $(1, 2, -1, 0)$.

(ii) Encuentre los posibles valores de α para que el vector $\vec{x} = (1, \alpha, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ sea paralelo al vector $(1, 2, -1, 0)$.

(iii) Encuentre los posibles valores de β para que la norma del vector $(2, \beta, 4, -2) \in \mathbb{R}^4$ sea 7.

(3 Puntos) **II**. Una matriz cuadrada A es llamada *simétrica* si $A = A^T$. Una matriz cuadrada D es llamada *diagonal* si $D_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$, es decir que los únicos elementos diferentes de cero están en la diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

(iv) Si A es una matriz cuadrada simétrica y D una matriz cuadrada diagonal (ambas del mismo tamaño), entonces
$$AD = DA.$$

(v) Si A y B son matrices simétricas (ambas del mismo tamaño), entonces AB también es una matriz simétrica.

Solución

I.

(i) Dos vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son ortogonales si y solamente si $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$. En este caso, para que el vector $(1,\alpha,-1,2)$ sea perpendicular al vector $(1,2,-1,0)$ debemos tener

$$(1,\alpha,-1,2)\cdot(1,2,-1,0)=0$$

es decir,

$$1+2\alpha+1+0=0$$

luego, encontramos que $\alpha=-1$.

(ii) Dos vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son paralelos si uno es múltiplo del otro, es decir que existe un escalar $r\neq 0\in\mathbb{R}$, tal que $\vec{x}=r\vec{y}$. En este caso, para que el vector $(1,\alpha,-1,2)$ sea paralelo al vector $(1,2,-1,0)$ debemos tener que

$$(1,\alpha,-1,2)=r(1,2,-1,0)$$

para algún r. Sin embargo, si esto fuera cierto tendríamos que $2r=0$, luego $r=0$ y, por lo tanto, los vectores no son paralelos para ningún valor de α.

(iii) La norma de un vector $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ está dada por

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

entonces

$$\|(2,\beta,4,-2)\|=\sqrt{2^2+\beta^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24+\beta^2}=7,$$

solamente si $24+\beta^2=49$, es decir, si $\beta=\pm 5$.

II.

(iv) Falso. Calculando directamente tenemos contraejemplos sencillos: Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, entonces

$$AD=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix},$$

pero

$$DA=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}.$$

(iv) Falso. Sabemos que si A y B son cuadradas y del mismo tamaño, entonces AB tiene el mismo tamaño y, por lo visto en el curso, tenemos que $(AB)^T=B^TA^T$. Si tanto A como B son simétricas, entonces $A^T=A$ y $B^T=B$, luego

$$(AB)^T=B^TA^T=BA.$$

Concluimos entonces que, para que la afirmación sea cierta, es decir que AB sea una matriz simétrica ($(AB)^T = AB$), se debería cumplir que $AB = BA$ siempre que A y B sean simétricas. Sin embargo, dado que toda matriz diagonal es simétrica, el ejercicio anterior nos da contraejemplos en matrices 2×2: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

que *no* es simétrica.