Quiz II – Álgebra Lineal

Septiembre 22 de 2008

(3 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero justificando -matemáticamente- su respuesta.

(i) La aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal.

(ii) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales, y $T(\vec{e}_1) = S(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2) = S(\vec{e}_2)$, donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$T(\vec{x}) = S(\vec{x})$$

para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

(3 Puntos) **II**. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Encuentre la matriz A_T de la transformación y compruebe que $T(\vec{x}) = A_T\vec{x}$ para todo $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
2. Encuentre el núcleo (espacio nulo) y el rango (espacio imagen) de T.
3. Es T invertible? En caso de serlo dé una fórmula explícita para $T^{-1}(\vec{x})$.

Solución

I.

(i) Falso. Una aplicación T entre espacios vectoriales es una transformación lineal si se verifican las relaciones

(1) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$,

(2) $T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$.

En este caso, si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T(\vec{x}+\vec{y}) = T\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) \\ 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2) \end{pmatrix},$$

mientras que

$$T(\vec{x})+T(\vec{y}) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 2x_1+x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2y_1y_2 \\ 2y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2+2y_1y_2 \\ 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2) \end{pmatrix},$$

luego T *no* es una transformación lineal. En realidad, ninguna de las condiciones que definen una transformación lineal se verifica: Si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha\vec{x}) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 x_1x_2 \\ 2\alpha x_1+\alpha x_2 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\alpha T(\vec{x}) = \alpha\, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(2x_1x_2) \\ \alpha(2x_1+x_2) \end{pmatrix}.$$

(ii) Verdadero. Si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ entonces, para cualquier $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tenemos $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son transformaciones *lineales* tales que

$$T(\vec{e}_1) = S(\vec{e}_1), \quad T(\vec{e}_2) = S(\vec{e}_2),$$

entonces

$$T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1T(\vec{e}_1)+x_2T(\vec{e}_2) = x_1S(\vec{e}_1)+x_2S(\vec{e}_2) = S(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2) = S(\vec{x}),$$

luego la afirmación es verdadera. (También se puede argumentar que las dos matrices, las correspondiente a T y a S, son iguales.)

II.

1. La transformación lineal T está dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1-x_2+x_3 \end{pmatrix}$ luego, para encontrar la matriz A_T de la transformación, basta observar el efecto de ésta en la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz de T es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la misma matriz del parcial anterior. Finalmente, si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, es facil ver que

$$A_{_T}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = T(\vec{x}).$$

2. El espacio nulo de T es el conjunto de vectores que se anulan bajo T, es decir el espacio nulo de $A_{_T}$. Para calcularlo hacemos reducción de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3 \to F_3 + F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_3 \to -F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que nos da como única solución $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, luego

$$N_T = \{\vec{0}\}.$$

Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y su espacio nulo es trivial, su espacio imagen debe ser $\mathbb{R}^3$.

3. Podemos concluir, a partir del resultado anterior, que T es invertible ya que su matriz lo és (sus tres vectores columna son vectores linealmente independientes, correspondientes a los tres pivotes en la reducción), y su inversa estará dada entonces por

$$T^{-1}(\vec{x}) = A_{_T}^{-1}\vec{x}.$$

La matriz inversa de $A_{_T}$, ya calculada en el parcial anterior, se encuentra mediante la siguiente reducción:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 \to F_1 + F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \to -F_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

luego $A_{_T}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y, si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$T^{-1}(\vec{x}) = A_{_T}^{-1}\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$