Quiz III – Álgebra Lineal

Octubre 27 de 2008

(3 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando matematicamente su respuesta.

(i) Si A y B son matrices 3×3 y $\det A = 2$, $\det B = -1$, entonces

$$\det(3AB) = 18.$$

(ii) Si $A = \begin{pmatrix} - & \vec{a} & - \\ - & \vec{b} & - \\ - & \vec{c} & - \end{pmatrix}$ es una matriz 3×3 con vectores fila $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, entonces $\det A = 0$.

(iii) Los cuatro puntos $(0,0,0), (-1,1,0), (1,-1,1)$ y $(0,0,1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano en $\mathbb{R}^3$).

(3 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Demuestre que 1 y 3 son valores propios de A.

(ii) Calcule las multiplicidades geométrica y algebraica del valor propio 1.

(iii) Diga si A es diagonalizable.

Solución

I. (i) Falso. Si A y B son matrices 3×3 y $\det A = 2$, $\det B = -1$, entonces

$$\det(3AB) = 3^3 \det(AB) = 27(\det A)(\det B) = 27(2)(-1) = -54 \neq 18.$$

(ii) Verdadero. Si $A = \begin{pmatrix} - & \vec{a} & - \\ - & \vec{b} & - \\ - & \vec{c} & - \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, entonces

$$\det A = \det \begin{pmatrix} - & \vec{a} & - \\ - & \vec{b} & - \\ - & \vec{a} - \vec{b} & - \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} - & \vec{a} & - \\ - & \vec{b} & - \\ - & \vec{a} & - \end{pmatrix} = 0$$

por tener una fila repetida.

(iii) Verdadero. Si los puntos $(0,0,0), (-1,1,0), (1,-1,1)$ y $(0,0,1)$ están en un mismo plano de $\mathbb{R}^3$, entonces los tres vectores correspondientes $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente *dependientes*, luego el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ debería ser igual a 0. En efecto, $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, así que los puntos son coplanares.

II. (i) Para demostrar que 1 y 3 son valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ debemos calcular los determinantes de $A - 1I$ y $A - 3I$, y verificar que son cero. De hecho,

$$\det(A - 1I) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

ya que hay una fila (y una columna) de ceros, y

$$\det(A - 3I) = \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ya que la última fila es un múltiplo de la segunda.

(ii) El polinomio característico de la matriz es $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$. luego la multiplicidad algebraica de 1 es 2. Para calcular los vectores propios correspondientes al valor propio 1, resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente, $(A - 1I)\vec{x}_1 = \vec{0}$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego la única ecuación lineal es $2b + c = 0$, así que $c = -2b$ y a es arbitrario,

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y entonces $E_{\lambda=1} = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, así que su multiplicidad geométrica es 2.

(iii) Finalmente, como el único valor propio con multiplicidad mayor que 1 es $\lambda = 1$, y sus multiplicidades geométrica y algebraica son iguales, la matriz A es diagonalizable (obsérvese que el sistema homogeneo $(A-3I)\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones porque la matriz correspondiente, ya vimos, tiene determinante cero, luego la existenxcia del tercer vector propio está garantizada).