MATE-1105-1 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 2

NOMBRE:______________________________ **CÓDIGO:** ___________________

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

I. Considere los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

a. `[2 Puntos]`. Calcule el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$.

b. `[2 Puntos]`. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$.

II. Sea $P_2[x]$ el de polinomios de grado menor o igual a 2, con coeficientes reales, y $\mathbb{R}^2$ el espacio euclidiano en dos dimensiones con las operaciones usuales.

a. `[2 Puntos]`. Pruebe que los conjuntos $B_P = \{1 - x, x, x + x^2\}$ y $B_E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son bases para $P_2[x]$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

b. `[2 Puntos]`. Encuentre el vector $[p(x)]_{B_P}$ de coordenadas del polinomio $p(x) = 2 + 8x + 6x^2$ respecto a la base B_P.

c. `[2 Puntos]`. Demuestre que la aplicación $T : P_2[x] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p''(0) - p(0) \\ p(0) - p'(0) \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

d. `[2 Puntos]`. Encuentre el núcleo (espacio nulo) N_T y el rango (espacio imagen) R_T de la transformación lineal T.

e. `[2 Puntos]`. Encuentre la matriz de la transformación lineal T respecto a las bases B_P y B_E dadas anteriormente.

f. `[2 Puntos]`. Encuentre el vector $[T(p(x))]_{B_E}$ de coordenadas de $T(p(x))$ respecto a la base B_E.

III. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

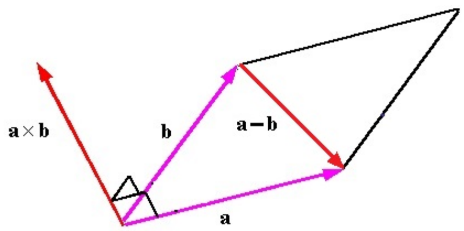
a. `[2 Puntos]`. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuyo rango (o espacio imagen) es el espacio $\mathbb{R}^3$.

b. `[2 Puntos]`. Si $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución

I.

a. El área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ es la mitad del área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir



$$A = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{2} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{2} = \frac{3}{2}.$$

(← ver figura.)

b. El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ está dado por

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|,$$

así que, en este caso,

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 9.$$

II.

a. Como sabemos que $\dim P_2[x] = 3$, basta demostrar que el conjunto $B_P = \{1 - x, x, x + x^2\}$ es linealmente independiente para verificar que es una base. Si

$$\alpha_1(1 - x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x + x^2) = 0,$$

tenemos que $\alpha_1 = 0$, $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ y $\alpha_3 = 0$, as que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ y el conjunto es una base para $P_2[x]$. De igual forma, como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ y los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son proporcionales, el conjunto B_E es una base para $\mathbb{R}^2$.

b. El polinomio $p(x) = 2 + 8x + 6x^2$ se escribe, como combinación lineal de los elementos de la base B_P, como

$$p(x) = 2 + 8x + 6x^2 = 2(1 - x) + 4(x) + 6(x + x^2),$$

así que su vector de coordenadas respecto a la base B_P es

$$[p(x)]_{B_P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c. La aplicación $T : P_2[x] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p''(0) - p(0) \\ p(0) - p'(0) \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal, pues si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se satisfacen:

(a)

$$T(p(x) + q(x)) = \begin{pmatrix} 2(a_2 + b_2) - (a_0 + b_0) \\ (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 - a_0 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_2 - b_0 \\ b_0 - b_1 \end{pmatrix} = T(p(x)) + T(q(x))$$

y

(b)

$$T(\alpha p(x)) = \begin{pmatrix} 2\alpha a_2 - \alpha a_0 \\ \alpha a_0 - \alpha a_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2a_2 - a_0 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix} = \alpha T(p(x)).$$

d. El núcleo (especio nulo) de T es, por definición,

$$N_T = \{p(x) \in P_2[x] \mid T(p(x)) = 0\}$$

y por la definición de la transformación, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in N_T$ si y solamente si

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} 2a_2 - a_0 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir si $a_0 = a_1 = 2a_2 = 0$, luego $p(x) \in N_T$ si y solamente si $p(x) = a_0 + a_0x + \frac{1}{2}a_0x^2 = a_0(1 + x + \frac{1}{2}x^2)$, así que

$$N_T = \mathrm{Sp}\left\{1 + x + \frac{1}{2}x^2\right\}.$$

Para encontrar el rango (espacio imagen) de la transformación lineal T es suficiente recordar que $\dim P_2[x] = 3$ y $\dim N_T = 1$, luego, por la ecuación del rango,

$$\dim R_T = \dim P_2[x] - \dim N_T = 3 - 1 = 2,$$

luego $R_T = \mathbb{R}^2$.

e. La matriz de la transformación lineal T respecto a las bases B_P y B_E es, por definición,

$$[M_T]_{B_P}^{B_E} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1-x)]_{B_E} & [T(x)]_{B_E} & [T(x+x^2)]_{B_E} \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Dado que la transformación está dada por

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} 2a_2 - a_0 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$T(1-x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad T\left(x + x^2\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y, en términos de la base $B_E = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, estos vectores tiene coordenadas

$$[T(1-x)]_{B_E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad [T(x)]_{B_E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad [T\left(x + x^2\right)]_{B_E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

entonces la matriz de la transformación respecto a las bases dadas es

$$[M_T]_{B_P}^{B_E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

f. Podemos calcular el vector $[T(p(x))]_{B_E}$ de coordenadas de $T(p(x))$ respecto a la base B_E de dos formas diferentes: calcxulando directamente la imagen de $p(x)$ bajo T, o usando la matriz de la transformación y el resultado del numeral **b.** En efecto,

$$[T(p(x))]_{B_E} = [M_T]_{B_P}^{B_E}[p(x)]_{B_P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

y, calculando con estas coordenadas,

$$T(p(x)) = (2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-8)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix},$$

como puede demostrarse directamente.

III.

a. Falso. No existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuyo rango (o espacio imagen) sea el espacio $\mathbb{R}^3$, pues la ecuación del rango para tal transformación lineal sería $2 = \dim N_T + \dim R_T$, lo cual es imposible si $\dim R_T = 3$.

b. Falso. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores paralelos en $\mathbb{R}^3$, el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es $\vec{0}$, luego estos tres vectores no formarían una base para $\mathbb{R}^3$.