MATE-1105-1 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 3

NOMBRE:______________________________ **CÓDIGO:** ____________________

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

I. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. `[2 Puntos]`. Demuestre que $\lambda = 1$ es un valor propio de la matriz A y que $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz A.

b. `[2 Puntos]`. Encuentre los demás valores propios y vectores propios de A.

c. `[2 Puntos]`. Diga si A es diagonalizable y, en caso de serlo, encuentre matrices C (invertible) y D (diagonal) tales que $A = CDC^{-1}$ (verifique esta última igualdad).

d. `[2 Puntos]`. Use la descomposición $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para calcular $A^5\vec{x}$.

II. Considere las bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ para $\mathbb{R}^2$, y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 7y \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$

a. `[2 Puntos]`. Encuentre la matriz $[M_T]_B$ de la transformación lineal respecto a la base B.

b. `[2 Puntos]`. Encuentre las matrices de cambio de base $C_B^{B'}$ y $C_{B'}^{B}$.

c. `[2 Puntos]`. Usando los resultados de las partes **a.** y **b.**, encuentre la matriz $[M_T]_{B'}$ de la transformación lineal respecto a la base B'.

d. `[2 Puntos]`. ¿Existe alguna base B'' de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz $[M_T]_{B''}$ de la transformación lineal respecto a la base B'' sea diagonal? Explique.

III. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. `[2 Puntos]`. Si un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene soluciones, y su matriz aumentada está dada por $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 2b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 2b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 2b_3 \end{array}\right)$, entonces su única solución es $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. `[2 Puntos]`. Si A, B y C son matrices 3×3, y $\det A = -3$, $\det B = 1$ y $\det C = \frac{1}{3}$, entonces $\det\left(\frac{1}{3}A^2B^TC^{-1}\right) = 1$.

c. `[2 Puntos]`. Si las matrices A y B son matrices cuadradas similares y A es una matriz simétrica, entonces B también es simétrica.

Solución

I.

a. Un número λ es valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si y solamente si $\det(A - \lambda I) = 0$. Restando 1 de la diagonal en A obtenemos que $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$, así que $\lambda = 1$ es valor propio para A.

Por otra parte, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de la matriz A porque

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lo que demuestra que $\vec{x}$ es vector propio para A con valor propio $\lambda = 2$.

b. Para encontrar los demás valores propios de A podemos calcular el polinomio carac-ter´istico de A, pero también podemos usar directamente el resultado del numeral anterior. En efecto, tenemos ya dos valores propios para A ($\lambda = 1$ y $\lambda = 2$), y sabemos que el determinante de A es el producto de su tres valores propios. Como $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, los valores de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda = 2$.

Los vectores propios de A están dados por la solución a los sitemas homogeneos $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, para los valores propios encontrados. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde tenemos que $2a - c = 0$, luego

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix} = (a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que $E_{\lambda=1} = \mathsf{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Para $\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde tenemos que $a - c = 0$ y $b = 0$, luego

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = (a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

así que $E_{\lambda=2} = \mathsf{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c. La matriz A es diagonalizable porque la multiplicidad algebraica de cada valor propio es igual a su multiplicidad geométrica:

$$\mu_a(\lambda = 1) = 2 = \mu_g(\lambda = 1) \quad \text{y} \quad \mu_a(\lambda = 2) = 1 = \mu_g(\lambda = 2).$$

La matriz de vectores propios $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible, y junto con la matriz diagonal de valores propios $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ satisfacen

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = CD,$$

luego $A = CDC^{-1}$.

d. Finalmente, dado que si $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ entonces $A^5\vec{x} = \lambda^5\vec{x}$, si $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A^5\vec{x} &= A^5\left((3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (3)A^5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)A^5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (2)A^5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (3)(1)^5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)(1)^5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (2)(2)^5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^6 \\ 3 \\ -2+2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 3 \\ 62 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

II. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+7y \\ x+3y \end{pmatrix}.$$

a. La matriz $[M_T]_B$ de la transformación lineal respecto a la base $B = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ para $\mathbb{R}^2$ está dada por

$$[M_T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_B & [T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_B \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Como $T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (5)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (9)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$[M_T]_B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

b. Las matrices de cambio de base $C_B^{B'}$ y $C_{B'}^B$, donde $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, son inversas una de la otra. La primera es

$$C_B^{B'} = M_{B'}^{-1}M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y la segunda es

$$C_{B'}^B = M_B^{-1}M_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1- & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

c. Usando los resultados de las partes **a.** y **b.**, tenemos que la matriz $[M_T]_{B'}$ de la transformación lineal respecto a la base B' es:

$$[M_T]_{B'} = C_B^{B'}[M_T]_B C_{B'}^B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

como puede verificarse directamente.

d. Si existe alguna base B'' de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz $[M_T]_{B''}$ de la transformación lineal respecto a la base B'' sea diagonal, la transformación lineal, en cualquiera de sus representaciones matriciales, debería ser diagonalizable. En efecto, el polinomio característico de las tres representaciones matriciales de la transformación es el mismo:

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 7 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 9 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+4)$$

y, dado que tiene dos valores propios distintos ($\lambda = 4$ y $\lambda = -4$), estas matrices son diagonalizables, luego la base B'' si existe.

III. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. VERDADERO. Por la regla de Cramer, si un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene soluciones, y su matriz aumentada está dada por $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 2b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 2b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 2b_3 \end{array}\right)$, entonces el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ debe ser diferente de cero, y su única solución es $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ donde

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2b_1 & b_1 & c_1 \\ 2b_2 & b_2 & c_2 \\ 2b_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} = 0, \qquad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} = 2,$$

y

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 2b_1 \\ a_2 & b_2 & 2b_2 \\ a_3 & b_3 & 2b_3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} = 0,$$

por las propiedades elementales de los determinantes.

b. VERDADERO. Si A, B y C son matrices 3×3, y $\det A = -3$, $\det B = 1$ y $\det C = \frac{1}{3}$, entonces

$$\det\left(\frac{1}{3}A^2 B^T C^{-1}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{(\det A)^2 \det B}{\det C} = \left(\frac{1}{27}\right)\frac{(-3)^2}{\frac{1}{3}} = \frac{27}{27} = 1.$$

c. FALSO. Las matrices A y D del punto **I.c.** son cuadradas y similares, y D es una matriz simétrica, sin embargo A *no* es simétrica.