

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.**

Nombre: \_\_\_\_\_ Código: \_\_\_\_\_

1. Considere los vectores  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Responda *falso* o *verdadero*, justificando *matemáticamente* su respuesta.

- i.  $A^2B = C$ .
- ii.  $A - A^2 = 2I$ .
- iii.  $B\vec{x} = 3\vec{x}$ .
- iv.  $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \frac{1}{2}\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ .
- v. El vector  $\vec{x} + \vec{y}$  es perpendicular al vector  $\vec{x} - \vec{y}$ .
- vi.  $\text{Proy}_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{x} = \vec{0}$ .
- vii. El área del paralelogramo generado por los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  es igual a 9.
- viii. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  y  $\vec{x} + \vec{y}$  es igual a 9.
- ix. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  y  $\vec{x} \times \vec{y}$  es igual a 9.

(9 puntos)

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}.$$

- i. Escriba el sistema en forma matricial  $A\vec{x} = \vec{b}$ .
- ii. Demuestre que el conjunto de soluciones del sistema es una recta en  $\mathbb{R}^3$ .
- iii. Encuentre la ecuación del plano normal a la recta del enunciado anterior que pasa por el punto  $(1, -1, 1)$ .

iv. Demuestre que el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$
 tiene solución única y encuentrela.

(11 puntos)

## Solución

1.

i. **Falso.** Primero,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

así que

$$A^2B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \neq C.$$

ii. **Verdadero.**

$$A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

iii. **Falso.**

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

iv. **Falso.** Hay varias formas de hacer este ejercicio. Primero, como  $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sin\theta$  y  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ , podemos calcular explícitamente el ángulo entre ellos usando el producto punto y sus normas:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 9, \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 18 \quad \text{y} \quad \vec{y} \cdot \vec{y} = 9,$$

luego  $9 = \sqrt{18}\sqrt{9}\cos\theta$ , es decir que  $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta$ , así que

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

También se puede calcular directamente:  $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$  y, entonces

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = 9 \neq \frac{1}{2}(\sqrt{18}\sqrt{9}) = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

v. **Falso.** Calculando directamente:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 9 \neq 0,$$

luego el vector  $\vec{x} + \vec{y}$  no es perpendicular al vector  $\vec{x} - \vec{y}$ .

vi. **Verdadero.** Dado que  $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\right)\vec{b}$ , y los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{x} \times \vec{y}$  son perpendiculares,

$$\text{Proy}_{\vec{x} \times \vec{y}}\vec{x} = \vec{0}.$$

vii. **Verdadero.** El área del paralelogramo generado por los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  es igual a  $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ , y

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \text{luego el área del paralelogramo es igual a } 9.$$

viii. **Falso.** El volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $\vec{x}, \vec{y}$  y  $\vec{x} + \vec{y}$  es igual a 0, ya que el vector  $\vec{x} + \vec{y}$  está en el plano que contiene a los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ :

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right| = \left| (3) \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + (3) \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \right| = |(3)(-6) + (3)(6)| = 0.$$

ix. **Falso.** El volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $\vec{x}, \vec{y}$  y  $\vec{x} \times \vec{y}$  es igual a 81:

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} \right| = \left| (3) \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + (3) \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right| = |(3)(9) + (3)(18)| = 81.$$

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}.$$

i. El sistema en forma matricial  $A\vec{x} = \vec{b}$  es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

ii. Para encontrar el conjunto de soluciones del sistema, consideramos la matriz aumentada y llevamos a cabo la reducción correspondiente:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{1}{2}F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{4}F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Así, el sistema se reduce a  $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ , es decir que

$$\begin{cases} y = -1 + 2z \\ x = -1 - y + 3z = z \end{cases}$$

lo que implica que la solución general tiene la forma

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -1 + 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para cualquier  $z \in \mathbb{R}$ , que es la ecuación vectorial de una recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el punto  $(0, -1, 0)$  y cuyo vector director es  $\langle 1, 2, 1 \rangle$ .

- iii. Para encontrar la ecuación del plano normal a la recta del enunciado anterior, que pasa por el punto  $(1, -1, 1)$ , solamente necesitamos el vector normal al plano  $\vec{N} = \langle 1, 2, 1 \rangle$  y el punto dado. Si  $\vec{x} = \langle x, y, z \rangle$  es cualquier vector en el plano, deberá satisfacer la ecuación

$$\vec{N} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_o) = 0$$

que, en este caso, es

$$\langle 1, 2, 1 \rangle \cdot \langle x - 1, y + 1, z - 1 \rangle = 0,$$

así que la ecuación del plano normal a la recta es  $x + 2y + z = 0$ .

- iv. Finalmente, observe que en el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$
 aparecen las dos

ecuaciones independientes del punto ii. (dos planos que se intersectan en una recta) y la tercera es justamente la encontrada en el enunciado anterior (un plano ortogonal a la recta de intersección de los dos planos), así que el sistema debe tener solución única. Haciendo la correspondiente reducción encontramos tal solución:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - 3F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - F_1}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \mapsto -\frac{1}{4}F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Así, el sistema se reduce a 
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - 2z = -1 \\ 6z = 2 \end{cases}$$
, es decir que  $z = \frac{1}{3}$ ,  $y = -1 + 2z = -\frac{1}{3}$  y

$x = z = \frac{1}{3}$ , luego la solución que buscamos es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$