Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ____________

1. Considere los vectores $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y las matrices

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Responda *falso* o *verdadero*, justificando *matemáticamente* su respuesta.

   i. $\mathsf{A}^2\mathsf{B} = \mathsf{C}$.
   ii. $\mathsf{A}^2 - \mathsf{A} = 2\mathsf{I}$.
   iii. $\mathsf{B}\vec{\mathbf{x}} = 3\vec{\mathbf{x}}$.
   iv. $\|\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\|$.
   v. El vector $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}$.
   vi. $\mathsf{Proy}_{\vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{y}}}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$.
   vii. El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$ es igual a 81.
   viii. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ es igual a 81.
   ix. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}$ es igual a 81.

   (9 puntos)

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y - 3z &= -1 \\ 2x - y &= 1 \\ 3x - y - z &= 1 \end{cases}$.

   i. Escriba el sistema en forma matricial $\mathsf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.
   ii. Demuestre que el conjunto de soluciones del sistema es una recta en $\mathbb{R}^3$.
   iii. Encuentre la ecuación del plano normal a la recta del enunciado anterior que pasa por el punto $(1, -1, 1)$.
   iv. Demuestre que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - 3z &= -1 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 3x - y - z &= 1 \end{cases}$ tiene solución única y encuentrela.

   (11 puntos)

Solución

1.

i. **Verdadero.** Primero,

$$\mathsf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

así que

$$\mathsf{A}^2\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathsf{C}.$$

ii. **Falso.**

$$\mathsf{A}^2 - \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathsf{I} \neq 2\mathsf{I}.$$

iii. **Falso.**

$$\mathsf{B}\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

iv. **Verdadero.** Hay varias formas de hacer este ejercicio. Primero, como $\|\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\| \sin\theta$ y $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$, podemos calcular explícitamente el ángulo entre ellos usando el producto punto y sus normas:

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = 9, \;\; \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 18 \;\text{ y }\; \vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = 9,$$

luego $9 = \sqrt{18}\sqrt{9}\cos\theta$, es decir que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta$ (porque $\theta = \frac{\pi}{4}$), así que

$$\|\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\|.$$

También se puede calcular directamente: $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ y, entonces

$$\|\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}\| = 9 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{18}\sqrt{9}\right).$$

v. **Falso.** Calculando directamente:

$$\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \;\; \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) = 9 \neq 0,$$

luego el vector $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ *no* es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}$.

vi. **Verdadero.** Dado que $\mathsf{Proy}_{\vec{\mathbf{b}}}\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}\right)\vec{\mathbf{b}}$, y los vectores $\vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}$ son perpendiculares,

$$\mathsf{Proy}_{\vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{y}}}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

vii. **Falso.** El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$ es igual a $\|\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}\|$, y $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, luego el área del paralelogramo es igual a 9.

viii. **Falso.** El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ es igual a 0, ya que el vector $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ está en el plano que contiene a los vectores $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$:

$$\mathsf{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right| = \left| (3) \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + (3) \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \right| = |(3)(-6) + (3)(6)| = 0.$$

ix. **Verdadero.** El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}$ es igual a 81:

$$\mathsf{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} \right| = \left| (3) \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + (3) \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right| = |(3)(9) + (3)(18)| = 81.$$

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 3z & = & -1 \\ 2x - y & = & 1 \\ 3x - y - z & = & 1 \end{array} \right.$.

i. El sistema en forma matricial $\mathsf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbf{b}}}.$$

ii. Para encontrar el conjunto de soluciones del sistema, consideramos la matriz aumentada y llevamos a cabo la reducción correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xmapsto[F_2 \mapsto F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xmapsto[F_3 \mapsto F_3 - 3F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array} \right) \xmapsto[F_2 \mapsto -\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array} \right) \xmapsto[F_3 \mapsto F_3 + 4F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Así, el sistema se reduce a $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 3z & = & -1 \\ y - 2z & = & -1 \end{array} \right.$, es decir que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -1 + 2z \\ x & = & -1 - y + 3z = z \end{array} \right.$$

lo que implica que la solución general tiene la forma

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -1 + 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para cualquier $z \in \mathbb{R}$, que es la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(0, -1, 0)$ y cuyo vector director es $\langle 1, 2, 1 \rangle$.

iii. Para encontrar la ecuación del plano normal a la recta del enunciado anterior, que pasa por el punto $(1,-1,1)$, solamente necesitamos el vector normal al plano $\vec{\mathbf{N}} = \langle 1,2,1\rangle$ y el punto dado. Si $\vec{\mathbf{x}} = \langle x,y,z\rangle$ es cualquier vector en el plano, deberá satisfacer la ecuación

$$\vec{\mathbf{N}} \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_o) = 0$$

que, en este caso, es

$$\langle 1,2,1\rangle \cdot \langle x-1, y+1, z-1\rangle = 0,$$

así que la ecuación del plano normal a la recta es $x + 2y + z = 0$.

iv. Finalmente, observe que en el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z & = & -1 \\ x+2y+z & = & 0 \\ 3x-y-z & = & 1 \end{array}\right.$ aparecen las dos ecuaciones independientes del punto ii. (dos planos que se intersectan en una recta) y la otra (la segunda) es justamente la encontrada en el enunciado anterior (un plano ortogonal a la recta de intersección de los dos planos), así que el sistema debe tener solución única. Haciendo la correspondiente reducción encontramos tal solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[F_3 \mapsto F_3 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \xmapsto[F_2 \mapsto F_2 - F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \xmapsto[F_3 \mapsto -\frac{1}{4}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xmapsto[F_3 \mapsto F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right).$$

Así, el sistema se reduce a $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z & = & -1 \\ y+4z & = & 1 \\ -6z & = & -2 \end{array}\right.$, es decir que $z = \frac{1}{3}$, $y = 1 - 4z = -\frac{1}{3}$ y $x = z = \frac{1}{3}$, luego la solución que buscamos es

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$