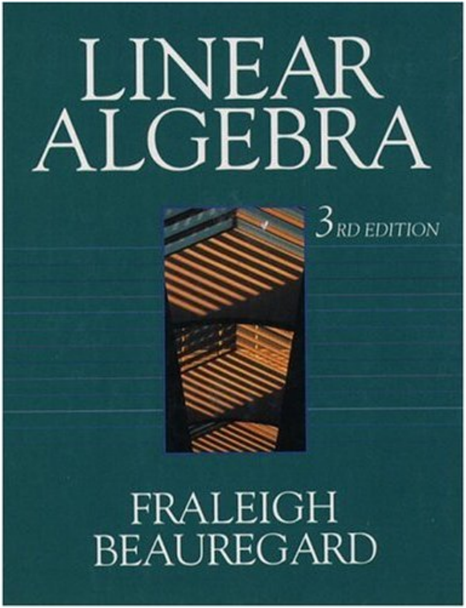
Álgebra Lineal

Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes

Primer Semestre de 2007

Texto guía:



Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Definición

Un *Espacio Vectorial* *es una tripla* $(V, +, \cdot)$ *donde* V *es un conjunto,* $+$ *una forma de sumar y* $\cdot$ *una forma de multiplicar elementos de* V *por escalares reales, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Álgebra vectorial en espacios vectoriales abstractos

Definición

Un Espacio Vectorial es una tripla $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto, $+$ una forma de sumar y $\cdot$ una forma de multiplicar elementos de V por escalares reales, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

Definición

Un Espacio Vectorial *es una tripla* $(V, +, \cdot)$ *donde* V *es un conjunto,* $+$ *una forma de sumar y* $\cdot$ *una forma de multiplicar elementos de* V *por escalares reales, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Álgebra vectorial en espacios vectoriales abstractos

Definición

Un Espacio Vectorial es una tripla $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto, $+$ una forma de sumar y $\cdot$ una forma de multiplicar elementos de V por escalares reales, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. *Asociatividad:*

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

2. *Conmutatividad:*

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

3. *Existencia de identidad aditiva:*

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

4. *Existencia de inverso aditivo:*

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V (llamados vectores*) y, si r, s escalares en $\mathbb{R}$, tenemos además*

1. *Distribitividad:*
$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V (llamados vectores) y, si r, s escalares en $\mathbb{R}$, tenemos además

1. *Distribitividad:*
$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$
2. *Distributividad:*
$$(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V (llamados vectores) y, si r, s escalares en $\mathbb{R}$, tenemos además

1. *Distribitividad:*
$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$
2. *Distributividad:*
$$(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$$
3. *Asociatividad:*
$$r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (rs) \cdot \vec{v}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V (llamados vectores) y, si r, s escalares en $\mathbb{R}$, tenemos además

1. *Distribitividad:*
$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$
2. *Distributividad:*
$$(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$$
3. *Asociatividad:*
$$r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (rs) \cdot \vec{v}$$
4. *Existencia de unidad multiplicativa:*
$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Tenemos por ejemplo...

Ejemplo 1

El Espacio $\mathbb{R}^n$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto escalar definidos, para $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, según:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n),$$

y

$$r \cdot \vec{v} = (rv_1, \ldots, rv_n),$$

forma un espacio vectorial.

Ejemplo 2

Espacios de Matrices

El conjunto $M_{mn}(\mathbb{R})$ de matrices $m \times n$ con entradas (o componentes) reales con suma de matrices

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}
$$

y producto de matrices por escalares

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix},$$

es un espacio vectorial.

Los ejemplos anteriores, con los que ya hemos trabajado anteriormente, no son las únicas estructuras de espacio vectorial que podemos definir sobre vectores y/o matrices, podemos modificar las operaciones para obtener nuevos espacios vectoriales, o definir nuevos espacios...

Ejemplo 3

Espacio de polinomios $P_n[x]$

Sea $P_n[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n, en una variable x, con coeficientes reales. Es decir, un elemento $p(x) \in P_n[x]$ es un polinomio de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

con $a_0, \ldots, a_n$ reales. Si definimos la suma de polinomios $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in P_n[x]$ y su producto por escalares como

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

y

$$r \cdot p(x) = ra_0 + ra_1 x + ra_2 x^2 + \cdots + ra_n x^n,$$

tenemos un espacio vectorial.

Ejemplo 4

Espacio de funciones $F(\mathbb{R})$

Sea $F(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiendo la suma de dos funciones $f, g \in F(\mathbb{R})$ como la función $f + g$ cuyo valor en $x \in \mathbb{R}$ está dado por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

y el producto de una función f por un escalar $r \in \mathbb{R}$ como la función cuyo valor en $x \in \mathbb{R}$ está dado por

$$(r\,f)(x) = r(f(x)),$$

tenemos un espacio vectorial.

La gran mayoría de los conceptos relativos a la estructura lineal de $\mathbb{R}^n$ pueden definirse de forma completamente análoga sobre espacios vectoriales abstractos.

Definición

Una combinación lineal de n vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, en un espacio vectorial V arbitrario, es un vector que se puede escribir de la forma

$$\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n,$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son escalares reales.

Así, por ejemplo, el vector (polinomio)

$$p(x) = 2 - x + 3x^3 \in P_3[x]$$

es una combinación de los vectores $1 + x$ y $1 + x^3$ ya que

$$2 - x + 3x^3 = (-1)(1 + x) + (3)(1 + x^3).$$

De igual forma, el vector (matriz)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

es una combinación de los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición

El espacio generado por k vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ en un espacio vectorial V es el conjunto

$$Sp\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\right) = \{r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_k\vec{v}_k \mid r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}\},$$

de todas las combinaciones lineales de tales vectores.

Ejemplo

- *La matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *genera todas las matrices diagonales y con diagonal idéntica en el espacio* $M_2(\mathbb{R})$.
- *Dos vectores (no paralelos) generan un plano en* $\mathbb{R}^3$.

Definición

Un subconjunto $V \subset W$ de un espacio vectorial W es llamado subespacio de W si es cerrado bajo suma y multiplicación por escalares, es decir:

1. *Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ entonces $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$.*

Definición

Un subconjunto $V \subset W$ de un espacio vectorial W es llamado subespacio *de W si es cerrado bajo suma y multiplicación por escalares, es decir:*

1. *Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ entonces $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$.*
2. *Si $\vec{v} \in V$ entonces, para cualquier escalar $r \in \mathbb{R}$, $r\vec{v} \in V$.*

Al igual que en $\mathbb{R}^n$, *cualquier subespacio de un espacio vectorial debe contener necesariamente al vector cero* $\vec{0}$:

Si $\vec{v} \in V$ entonces, por la propiedad 2, $-\vec{v} \in V$ y, por la propiedad 1,

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \in V.$$

Así, por ejemplo,

$$\{p(x) \in P_n[x] \mid p(0) = 1\}$$

No es un subespacio vectorial de $P_n[x]$.

$$\{p(x) \in P_n[x] \mid p(0) = 0\}$$

Es un subespacio vectorial de $P_n[x]$.

Bases para espacios vectoriales

Al igual que en los espacios $\mathbb{R}^n$, una base para un espacio es "lo mínimo necesario para generar el espacio":

Sea V un espacio vectorial. Un conjunto finito de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ (cuando existe) es llamado base para V si:

1. El conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo

Bases para espacios vectoriales

Al igual que en los espacios $\mathbb{R}^n$, una base para un espacio es "lo mínimo necesario para generar el espacio":

Sea V un espacio vectorial. Un conjunto finito de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ (cuando existe) es llamado base para V si:

1. El conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente.
2. $Sp(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = V$, es decir, cualquier vector de V puede escribirse como combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Ejemplo

$$\{-3,\ 1+x,\ -1+x+x^2\}$$

Es una base para $P_2[x]$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

No es una base para $M_2(\mathbb{R})$.

Igual que para $\mathbb{R}^n$, cada espacio vectorial de dimensión finita tiene una base canónica:

$$B_{nm} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

para los espacios de matrices.

$$B_{P_n[x]} = \left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\},$$

para los espacios de polinomios.

Teorema

Sea V un espacio vectorial cualquiera. Un subconjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ de V es una base del espacio si cualquier vector $\vec{v} \in V$ se puede escribir en forma única como combinación lineal de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$, es decir si existen escalares únicos $r_1, \ldots, r_k$ tales que

$$\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \cdots r_k\vec{v}_k.$$

Dimensión

El número de elementos de cualquier base para un espacio vectorial es el mismo cuando es finito, y es llamado la dimensión del espacio vectorial.

Cuando no existe un conjunto finito de vectores linealmente independientes que generen a V decimos que tal espacio es de dimensión infinita.

Por ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n
2. $M_n m(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión nm
3. $P_n[x]$ es un espacio vectorial de dimensión $n+1$
4. $F(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Por ejemplo, sea $D_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_{ij} = 0 \; si \; i \neq j\}$ el conjunto de matrices diagonales $n \times n$. El conjunto D_n es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$, y si $A \in D_n$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

luego

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para D_n, y

$$\dim D_n = n.$$

Cómo darle coordenadas a vectores ...

Sea V un espacio vectorial de dimensión n arbitrario (matrices, polinomios, ...), podemos dar una representación de los vectores de V como vectores de $\mathbb{R}^n$ con respecto a una base ordenada de V.

Si, por ejemplo, consideramos la base canónica para $P_2[x]$, $B_o = \{\ 1,\ x,\ x^2\}$ y el polinomio $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$, tenemos que

$$p(x) = (1)(1) + (2)(x) + (3)(x^2).$$

Si tomamos en lugar de la base anterior la base $B = \{\ -3,\ 1 + x,\ -1 + x + x^2\}$ para $P_2[x]$, existen tres escalares únicos que nos permiten escribir a $p(x)$ en términos de tal base:

$$p(x) = (-\frac{5}{3})(-3) + (-1)(1 + x) + (3)(-1 + x + x^2).$$

Tenemos entonces dos representaciones diferentes para el polinomio $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 \in P_2[x]$:

$$[p(x)]_{B_o} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

respecto a la base canónica B_o.

$$[p(x)]_{B_o} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

respecto a la base B.

Definición

Dado un vector $\vec{v} \in V$ en un espacio vectorial de dimensión finita y una base $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de tal forma que $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n$, para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ únicos. Entonces decimos que el vector $\vec{v}$ en coordenadas respecto a B_V es el vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$[\vec{v}]_{B_V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Cómo calcular los coeficientes cuando $V = \mathbb{R}^n$

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y tenemos cualquier base $B_n = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, para encontrar $[\vec{x}]_{B_n}$ podemos proceder en dos pasos:

1. Escribir los vectores de la base ordenada en una matriz aumentada $\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n & \vec{x} \end{array} \right)$.
2. Usar reducción de Gauss-Jordan hasta obtener la la izquierda la matriz identidad, entonces a la derecha quedará el vector que buscamos:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & [\vec{x}]_{B_n} \end{array} \right).$$

Transformaciones Lineales entre espacios vectoriales

Dados dos espacios vectoriales $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$, cada uno con sus operaciones lineales, una transformación lineal permite transferir la estructura lineal de uno en el otro:

Definición

Una aplicación

$$T : V \to W$$

*entre espacios vectoriales $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ es llamada **transformación lineal** si preserva la estructura lineal (suma y producto por escalar):*

1. *Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$, entonces $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) \oplus T(\vec{y})$.*
2. *Si $\vec{x} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $T(\alpha \cdot \vec{x}) = \alpha \odot T(\vec{x})$.*

Igual que en el caso de $\mathbb{R}^n$, una transformación lineal toma combinaciones lineales $\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k$ de vectores en V y las lleva a transformaciones lineales de vectores en W:

$$T(\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k) = \alpha_1 \odot T(\vec{x}_1) \oplus \alpha_2 \odot T(\vec{x}_2) \oplus \cdots \oplus \alpha_k \odot T(\vec{x}_k).$$

En particular, la imagen del cero $\vec{0}_V \in V$ bajo la transformación lineal debe ser el cero $\vec{0}_W \in W$:

$$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W.$$

De ahora en adelante, cuando no indiquemos explícitamente la operación en un espacio vectorial (de vectores columna, matrices, polinomios o funciones) asumiremos que las operaciones son las usuales, i.e. las definidas por componentes.

Ejemplo

La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ *definida por*

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y & -y \\ -z & y+z \end{pmatrix},$$

es una transformación lineal.

La aplicación $T : P_2[x] \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 1 \\ a_0 - a_2 \end{pmatrix},$$

no es una transformación lineal.

La matriz asociada a una transformación

En el capítulo anterior vimos como podemos asociar a una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una matriz $k \times n$. Ahora, si tenemos una transformación entre dos espacios vectoriales abstractos de dimensión finita ($\dim V = n$ y $\dim W = k$)

$$T : V \to W$$

podemos hacer la misma operación con respecto a un par de bases fijas B_V y B_W, para V y W respectivamente, de la forma siguiente:

1. Tomamos la base $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V y aplicamos la transformación a cada uno de sus vectores, obteniendo

$$\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\} \subset W.$$

2. Escribimos cada vector en $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ como vector de coordenadas respecto a la base B_W:

$$\{[T(\vec{v}_1)]_{B_W}, [T(\vec{v}_2)]_{B_W}, \ldots, [T(\vec{v}_n)]_{B_W}\} \subset \mathbb{R}^k.$$

3. Usamos cada uno de estos vectores como vector columna de la matriz de transformación (respecto a B_V y B_W):

$$A_T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(\vec{v}_1)]_{B_W} & [T(\vec{v}_2)]_{B_W} & \cdots & [T(\vec{v}_n)]_{B_W} \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

obteniendo una matriz $k \times n$.

Teorema

Sea $T : V \to W$ *una transformación lineal entre dos espacios vectoriales abstractos de dimensión finita* ($\dim V = n$ *y* $\dim W = k$) *y sean* B_V *y* B_W *bases para* V *y* W*, respectivamente. Entonces, si* A_T *es la matriz de transformación (respecto a* B_V *y* B_W*) y* $\vec{x} \in V$ *entonces*

$$[T(\vec{x})]_{B_W} = A_T[\vec{x}]_{B_V}.$$

Ejemplo

Tomemos la transformación lineal $T : P_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ *definida por*

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_0 - a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, si tomamos como base para $P_2[x]$

$$B_P = \left\{ -3,\ 1 + x,\ -1 + x + x^2 \right\}$$

tal base se transforma como

$$T(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, T(1 + x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T\left(-1 + x + x^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (continuación)

Si tomamos ahora como base para $M_2(\mathbb{R})$ la base canónica B_o, en términos de tal base:

$$[T(-3)]_{B_o} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(1+x)]_{B_o} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[T(-1+x+x^2)]_{B_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de la transformación respecto a B_P y B_o es

$$A_T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contenidos

Números complejos

La ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

no tiene solución en los números reales $\mathbb{R}$. Es decir, no existe un número real r tal que $r^2 = -1$. Sin embargo, hay conjuntos en los que la ecuación anterior si tiene solución. Por ejemplo, si multiplicamos la matriz $\mathfrak{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ por ella misma obtenemos

$$\mathfrak{i}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

luego la ecuación $M^2 + I = O$ si tiene solución en $M_2(\mathbb{R})$.

Vamos a definir un conjunto de números, llamados "complejos", que es (en algún sentido) el conjunto "más pequeño" en el que todas las ecuaciones polinomiales tienen solución.

El plano complejo

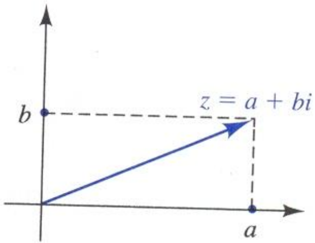
Definición

Un número complejo *es una expresión de la forma*

$$a + i\,b$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ *y el símbolo* i *denota una solución a la ecuación* $x^2 + 1 = 0$. *Es costumbre escribir* $i = \sqrt{-1}$.

Denotaremos por $\mathbb{C}$ el conjunto de números complejos y los representaremos en um plano de la siguiente forma: Si $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$, llamaremos a a la parte real de z, $Re(z)$, y a b su parte imaginaria, $Im(z)$. Poniendo $Re(z)$ en el eje de las x e $Im(z)$ en el eje de las y podemos representar a z como un vector en el plano.



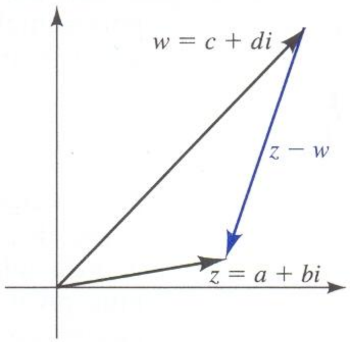
Operaciones con números complejos

El conjunto de números complejos es un campo algebraico, es decir que sabemos no solamente sumar y restar números complejos, sino que también tenemos una forma de multiplicarlos y dividirlos, con propiedades similares a las de los números reales:

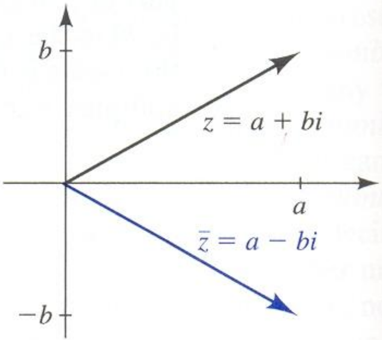
1. **Suma**: Sean $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, entonces
$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$
2. **Multiplicación**: Sean $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, entonces
$$zw = (ac - bd) + i(cb + ad).$$
3. **Conjugación**: Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, su conjugado es el número complejo
$$\bar{z} = a - ib.$$

Graficamente podemos ver el efecto de las operaciones en el plano complejo de la forma siguiente:

Suma (y resta)



Conjugación



Para entender gráficamente la multiplicación de números complejos vamos a introducir una nueva representación de $z \in \mathbb{C}$ llamada representación polar.

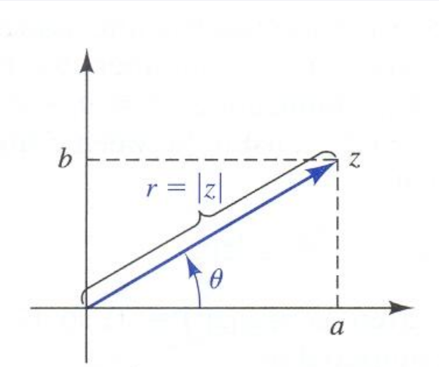
Definición

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, la norma o magnitud de z es el tamaño del vector z en el plano complejo:

$$| z |= \sqrt{a^2 + b^2}.$$

El argumento de z es el ángulo θ que hace el vector z con el eje real en el plano complejo. Si tomamos tal ángulo en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ lo llamamos argumento principal. Así,

$$z = r(cos\theta + i\, sen\theta).$$

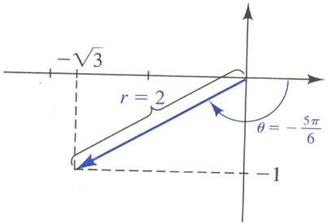


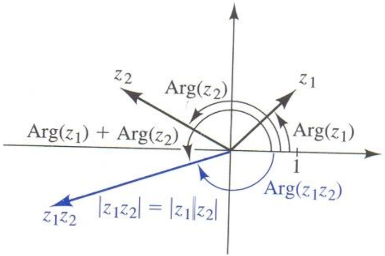
Ejemplo

Tomemos el número $z = -1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$*, entonces su norma y su argumento principal son*

$$| z | = \sqrt{1+3} = 2 \quad y \quad Arg(z) = -\frac{5\pi}{6}.$$

Ahora observemos que $z^2 = -2 - i2\sqrt{3}$*, luego* $| z^2 | = 4$ *y* $Arg(z^2) = -2\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$*, luego el efecto de la multiplicación es el de rotar y alargar el vector:*

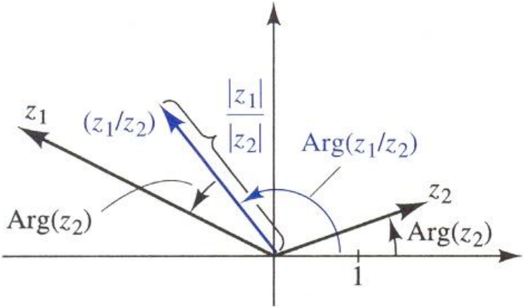




Lo anterior resulta mucho más claro si escribimos $z = r(cos\theta + i\, sen\theta)$ y observamos que

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + i\, sen(n\theta)).$$

De forma similar, el efecto de la división puede representarse graficamente de la siguiente forma:



Espacios vectoriales sobre el campo complejo

Definición

Un *Espacio Vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *es una tripla* $(V, +, \cdot)$ *donde* V *es un conjunto,* $+$ *una forma de sumar y* $\cdot$ *una forma de multiplicar elementos de* V *por escalares complejos, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Espacios vectoriales sobre el campo complejo

Definición

Un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{C}$ *es una tripla* $(V, +, \cdot)$ *donde* V *es un conjunto,* $+$ *una forma de sumar y* $\cdot$ *una forma de multiplicar elementos de* V *por escalares complejos, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Espacios vectoriales sobre el campo complejo

Definición

Un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{C}$ es una tripla $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto, $+$ una forma de sumar y $\cdot$ una forma de multiplicar elementos de V por escalares complejos, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Espacios vectoriales sobre el campo complejo

Definición

Un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{C}$ es una tripla $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto, $+$ una forma de sumar y $\cdot$ una forma de multiplicar elementos de V por escalares complejos, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. *Asociatividad:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$
2. *Conmutatividad:*
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$
3. *Existencia de identidad aditiva:*
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$
4. *Existencia de inverso aditivo:*
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V y, si r, s escalares en $\mathbb{C}$, tenemos además

1. *Distribitividad:*

$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V y, si r, s escalares en $\mathbb{C}$, tenemos además

1. *Distribitividad:*
$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$
2. *Distributividad:*
$$(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son elementos de V y, si r, s escalares en $\mathbb{C}$, tenemos además

1. *Distribitividad:*
$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$
2. *Distributividad:*
$$(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$$
3. *Asociatividad:*
$$r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (rs) \cdot \vec{v}$$

Definición (continuación)

donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son elementos de* V *y, si* r, s *escalares en* $\mathbb{C}$, *tenemos además*

1. *Distribitividad:*

$$r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$$

2. *Distributividad:*

$$(r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$$

3. *Asociatividad:*

$$r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (rs) \cdot \vec{v}$$

4. *Existencia de unidad multiplicativa:*

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Tenemos por ejemplo...

Ejemplos

El Espacio $\mathbb{C}^n$

El conjunto $\mathbb{C}^n = \{\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \mid z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$ con la suma y el producto escalar definidos, para $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$ y $r \in \mathbb{C}$, según:

$$\vec{z} + \vec{w} = (z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n),$$

y

$$r \cdot \vec{z} = (rz_1, \ldots, rz_n),$$

forma un espacio vectorial.

Ejemplos

Espacios de Matrices

El conjunto $M_{mn}(\mathbb{C})$ de matrices $m \times n$ con entradas (o componentes) reales con suma de matrices y multiplicación por escalares usuales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Espacio de polinomios $\mathbb{P}_n[x]$

Sea $\mathbb{P}_n[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n, en una variable x, con coeficientes complejos. Es decir, un elemento $p(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ es un polinomio de la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Si definimos la suma de polinomios y su producto por escalares de la forma usual tenemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Todos los conceptos anteriormente definidos para espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ (subespacios, bases, etc.) se definen de forma idéntica para espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos