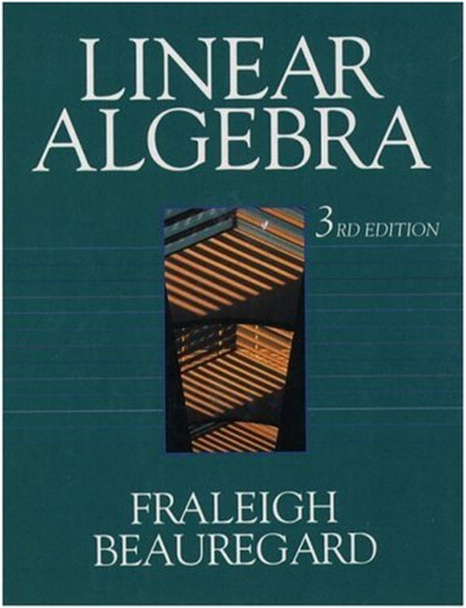
Álgebra Lineal

Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes

Primer Semestre de 2007

Texto guía:



Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

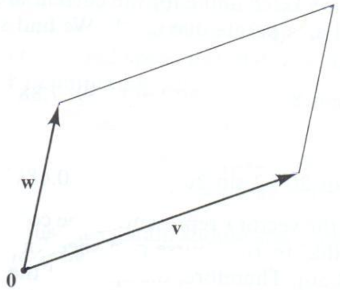
Contenidos

Contenidos

Área de un paralelogramo

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no paralelos en el plano $\mathbb{R}^2$, el paralelogramo generado por ellos es el que muestra la figura.
Para calcular el área de tal paralelogramo debemos conocer el ángulo θ entre los dos vectores, es decir el dado por

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \mid \vec{v} \mid \mid \vec{w} \mid \cos\theta.$$



Si escribimos los vectores en componentes como $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, un cálculo sencillo muestra que el área del paralelogramo es

$$\mathcal{A} = \mid ad - cb \mid .$$

Es claro que, en caso de ser paralelos los vectores, digamos $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, para algún $r \in \mathbb{R}$, el área resultante será cero, pues $\mathcal{A} = \mid arb - rab \mid = 0$. Visto desde el punto de vista de los sistemas de ecuaciones lineales, lo anterior corresponde a decir si el sistema de ecuaciones

$$ax + cy = k$$

$$bx + dy = l$$

tiene solución única o infinitas soluciones ya que, como vimos en el primer capítulo, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tiene inversa solamente cuando $ad - bc \neq 0$ y en tal caso su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Veremos en este capítulo que esta relación, válida para matrices 2×2, entre la condición para la invertibilidad de una matriz cuadrada (es decir, para la existencia de soluciones únicas de ciertos sistemas de ecuaciones lineales) y la medida de una propiedad geométrica (el área) existe para matrices de tamaño arbitrario, y está dada a través un número llamado el determinante.

Definición

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *una matriz* 2×2 *arbitraria. Definimos el* ***determinante*** *de* A *como*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En otras palabras, un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ si y solo si el determinante de su matriz asociada A es diferente de cero y, adicionalmente, el valor absoluto del determinante es igual al área del paralelogramo formado por los vectores fila (o columna) de la matriz A.

Producto cruz

Supongamos ahora que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (no paralelos) no están en el plano sino en $\mathbb{R}^3$, y queremos calcular el área del paralelogramo generado por ellos. En este caso introduciremos una nueva operación entre vectores de $\mathbb{R}^3$, llamada producto vectorial o producto cruz, que asocia a dos vectores de $\mathbb{R}^3$ un nuevo vector en $\mathbb{R}^3$.

Definición

Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, *el producto vectorial o producto cruz de* $\vec{v}$ *con* $\vec{w}$ *es el vector*

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Para retener más facilmente la anterior definición podemos proceder de la siguiente forma. Acomodamos las componentes de los dos vectores en una matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

donde $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ denotan los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y después calculamos su "determinante" reduciéndolo al caso anterior de la forma siguiente

$$\vec{v} \times \vec{w} = \text{``det''} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= \hat{i} \det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} - \hat{j} \det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} + \hat{k} \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

obteniendo

$$\vec{v} \times \vec{w} = \hat{i}\,(v_2 w_3 - v_3 w_2) - \hat{j}\,(v_1 w_3 - v_3 w_1) + \hat{k}\,(v_1 w_2 - v_2 w_1)\,,$$

que es la misma expresión dada en la definición.

Propiedades del producto cruz

Teorema

El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^3$ es igual a $|\ \vec{v} \times \vec{w}\ |$.

Definición

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Contenidos

Contenidos

Contenidos