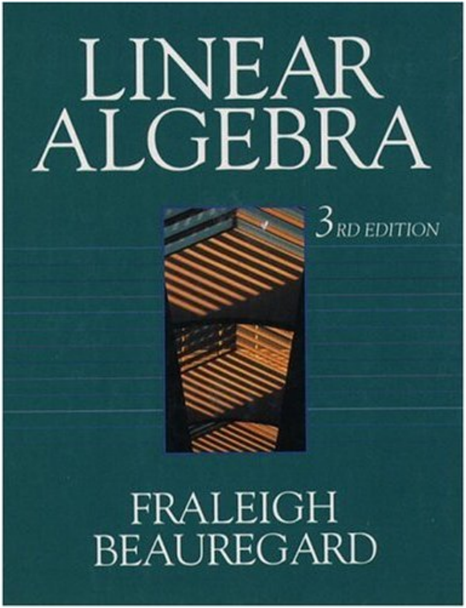
Álgebra Lineal

Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes

Primer Semestre de 2007

Texto guía:



Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

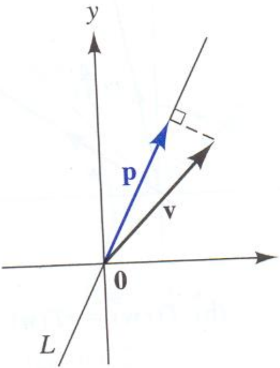
Contenidos

Contenidos

Contenidos

Si $\vec{v}$ es un vector y L una recta en el plano, es fácil ver que la proyección ortogonal $\vec{p} = \text{Proy}_L \vec{v}$ de $\vec{v}$ sobre L puede calcularse a partir de cualquier vector $\vec{x}$ contenido en la recta, mediante la fórmula:

$$\text{Proy}_L \vec{v} = \text{Proy}_{\vec{x}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\vec{x} \cdot \vec{x}} \right) \vec{x}. \qquad (1)$$



Para verificar que lo dicho anteriormente es cierto, podemos ver que:

1. $\vec{v}-\vec{p}=\vec{v}-\text{Proy}_{\vec{x}}\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{x}$ (i.e. a L):

$$(\vec{v}-\text{Proy}_{\vec{x}}\vec{v})\cdot\vec{x}=\left(\vec{v}-\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\right)\vec{x}\right)\cdot\vec{x}=\vec{v}\cdot\vec{x}-\vec{v}\cdot\vec{x}=0.$$

2. $\vec{p}=\text{Proy}_{\vec{x}}\vec{v}$ está contenido en la recta L.

Queremos ahora definir una descomposición similar para el caso en el que, en lugar de una recta, tengamos un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión arbitraria.

Definición

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Definimos el complemento ortogonal de W como el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que son perpendiculares a todos los vectores de W:

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \ \ \forall \vec{w} \in W\}.$$

El complemento ortogonal $W^{\perp}$ no es solamente un subconjunto, sino que es un *subespacio* de $\mathbb{R}^n$, y podemos encontrar tal subespacio a partir de una base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ para W como sigue: Formemos la matriz A cuyas *filas* son los k vectores de la base para W $A = \begin{pmatrix} - & \vec{w}_1 & - \\ - & \vec{w}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{w}_k & - \end{pmatrix}$, ahora, como un elemento de $W^{\perp}$ es perpendicular a todos los elementos de la base de W, si $\vec{v} \in W^{\perp}$ entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{w}_1 = \vec{v} \cdot \vec{w}_2 = \cdots = \vec{v} \cdot \vec{w}_k = \vec{0}.$$

Entonces

El complemento ortogonal de W es el mismo espacio nulo de la matriz A cuyas filas son una base para el espacio W.

Ejemplo: Sea $W = \{\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, vamos a calcular el complemento ortogonal $W^\perp$ de W. Por definiciíon, tenemos que

$$W^\perp = \{\vec{x} \in R^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W\}.$$

Ahora, si $\vec{w} \in W$, $\vec{w}$ debe ser un vector de la forma

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

donde hemos despejado la variable x_3 en términos de las otras dos variables en la ecuación que define el plano W, i.e. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Tenemos entonces que

$$\vec{w} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego una base para W es la conformada por los vectores
$\left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Así, si $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W^{\perp}$, debemos tener que $\vec{x} \cdot \vec{w}_1 = \vec{x} \cdot \vec{w}_2 = 0$, es decir, que buscamos que $\vec{x} \in \ker A$. Pero

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si y solo si $a + c = 0$ y $b + c = 0$, así que $a = b = -c$, luego
$W^{\perp} = \mathrm{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Propiedades del complemento ortogonal

Teorema (Propiedades)

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. $$\dim W + \dim W^{\perp} = n$$

Propiedades del complemento ortogonal

Teorema (Propiedades)

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. $$\dim W + \dim W^{\perp} = n$$

2. $$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

Propiedades del complemento ortogonal

Teorema (Propiedades)

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. $$\dim W + \dim W^{\perp} = n$$

2. $$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

3. *Todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ puede descomponerse de forma única como:*

$$\vec{v} = \vec{v}_W + \vec{v}_{W^{\perp}},$$

donde $\vec{v}_W \in W$ y $\vec{v}_{W^{\perp}} \in W^{\perp}$.

Para encontrar la descomposición de un vector mencionada en el teorema anterior, veamos cómo se puede calcular la *proyección de* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *sobre el subespacio* W. En el ejemplo anterior vimos cómo, a partir de una base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ para W, encontrar una base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-k}\}$ para el subespacio $W^\perp$. Por el teorema anterior (dado que $\dim W + \dim W^\perp = n$), juntando tales bases tendremos una base

$$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-k}\}$$

para $\mathbb{R}^n$. Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos calcular los coeficientes $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ necesarios para escribir

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{w}_k + \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \cdots + \beta_{n-k} \vec{x}_{n-k},$$

luego $\vec{v}$ puede descomponerse de forma única como $\vec{v} = \vec{v}_W + \vec{v}_{W^\perp}$, donde

$$\vec{v}_W = \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{w}_k \in W$$

y

$$\vec{v}_{W^\perp} = \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \cdots + \beta_{n-k} \vec{x}_{n-k} \in W^\perp.$$

Definición

Una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *es llamada ortonormal si todos sus vectores son unitarios y perpendiculares entre si, es decir:*

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

Existe una forma de, a partir de una base *cualquiera* $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, producir una base ortonormal mediante el uso de las proyecciones vistas anteriormente. En efecto, sea

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\| \vec{w}_1 \|},$$

entonces tenemos que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1$ y, para producir $\vec{u}_2$, a $\vec{w}_2$ le restamos su proyección sobre $\vec{u}_1$:

$$\vec{w}_2 - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \left(\frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right),$$

lo que nos da un vector perpendicular a $\vec{u}_1$ que, después de normalizar

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1)}{\| \vec{w}_2 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1) \|}$$

satisface

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1,$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0.$$

Continuando el proceso, llamado Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt, obtenemos una base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ para cualquier subespacio W de $\mathbb{R}^n$, en la cual

$$\vec{u}_j = \frac{\vec{w}_j - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_1}\vec{w}_j - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_2}\vec{w}_j - \cdots - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_{j-1}}\vec{w}_j}{\| \vec{w}_j - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_1}\vec{w}_j - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_2}\vec{w}_j - \cdots - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_{j-1}}\vec{w}_j \|}.$$

Bases ortogonales y proyecciones

A partir de una base ortogonal (u ortonormal) es posible calcular la proyección de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespacio W. En efecto, si $B_W = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ es una base ortonormal W, la proyección $\vec{x}$ sobre el subespacio W puede hacerse proyectando sobre cada uno de los vectores de la base B_W. Así,

$$\text{Proy}_W \vec{\mathbf{x}} = \text{Proy}_{\vec{u}_1} \vec{\mathbf{x}} + \text{Proy}_{\vec{u}_2} \vec{\mathbf{x}} + \cdots + \text{Proy}_{\vec{u}_k} \vec{\mathbf{x}}$$

$$= \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_1 + \cdots + \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{\mathbf{x}}}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_1.$$

Ejemplo

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^3$ cuyo complemento ortogonal es el plano $W^\perp = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + 2y + 3z = 0\right\}$. Para encontrar una base ortonormal para $W^\perp$, primero encontramos una base cualquiera de $W^\perp$.

Sea $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^\perp$, entonces, despejando alguna de las variables (digamos x) de la ecuación que define el plano tenemos que $x = -2y - 3z$, luego $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, así que $W^\perp = Sp \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejemplo (continuación)

Como $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$*, el conjunto* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *no es una base ortonormal y, para ortonormalizarla, tomamos* $\vec{v}_1' = \vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - Proy_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$*. Calculando este último tenemos*

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces una base ortonormal para $W^{\perp}$ *es*

$$B_{W^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo (continuación)

Para encontrar una base para W debemos encontrar primero W a partir de su complemento ortogonal. Si $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W$, *entonces*

$\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0 \; \forall \vec{\mathbf{x}} \in W^{\perp}$, *en particular* $\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{v}_1' = 0$ *y* $\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{v}_2' = 0$, *luego*

$$-2a + b = 0 \qquad y \qquad -\frac{3}{5}a - \frac{6}{5}b + c = 0,$$

luego $b = 2a$ *y* $c = 3a$, *es decir* $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$, *i.e.* $W = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejemplo (continuación)

Uniendo las bases encontradas para W y $W^\perp$, es decir tomando

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \right\},$$

tenemos una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$.

Si $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces la proyección de tal vector sobre el subespacio $W^\perp$ puede hacerse proyectando sobre cada uno de los vectores de la base $B_{W^\perp}$. Así

$$Proy_{W^\perp}\vec{\mathbf{x}} = Proy_{\vec{v}_1'}\vec{\mathbf{x}} + Proy_{\vec{v}_2'}\vec{\mathbf{x}} = \frac{\vec{v}_1' \cdot \vec{\mathbf{x}}}{\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_1'}\vec{v}_1' + \frac{\vec{v}_2' \cdot \vec{\mathbf{x}}}{\vec{v}_2' \cdot \vec{v}_2'}\vec{v}_2'.$$

Ejemplo (continuación)

Entonces

$$Proy_{W^\perp}\vec{\mathbf{x}} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para encontrar dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1 \in W$ *y* $\vec{\mathbf{x}}_2 \in W^\perp$ *en* $\mathbb{R}^3$ *tales que* $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2$*, podemos tomar* $\vec{\mathbf{x}}_2 = Proy_{W^\perp}\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ *y,*

despejando de la igualdad deseada,

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W.$$

Matrices Ortogonales

Definición

Sea A una matriz $n \times n$. Decimos que A es una matriz ortogonal si su inversa es igual a su transpuesta, es decir

$$A^T A = AA^T = I.$$

Una matriz ortogonal tiene las siguientes propiedades:

1. A es una matriz ortogonal si y solamente si sus filas y sus columnas forman bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$.
2. Si A es una matriz ortogonal entonces $A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$ para cualquier par de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
3. Los vectores propios de una matriz ortogonal correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.

Teorema de diagonalización para matrices simétricas

Toda matriz simétrica puede diagonalizarse ortogonalmente, es decir, si A es una matriz simétrica $n \times n$ entonces existen matrices D diagonal y C ortogonal tales que

$$A = CDC^{-1}.$$

Matriz de Proyección

Existe otra forma de calcular la proyección de un vector en un subespacio de $\mathbb{R}^n$, viendo tal proyección como una transformación lineal

$$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

y encontrando la matriz $n \times n$ que la representa.
La matriz de proyección sobre W puede encontrarse, a partir de una base $B_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ para W, formando una matriz auxiliar A cuyas columnas son los k vectores de tal base. Entonces

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

es la matriz que representa la proyección. Obsérvese que, si la base B_W para W es ortonormal, entonces $A^T A = I$ y la matriz de proyección se reduce a

$$P = AA^T.$$

Ejemplo

Sea, como en el ejemplo anterior, $W^{\perp} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. *Queremos calcular la matriz de proyección sobre* $W^{\perp}$*, luego tomamos la matriz* A *cuyas columnas son una base para* $W^{\perp}$ *y calculamos*
$P_{W^{\perp}} = A(A^TA)^{-1}A^T$.
Como $W^{\perp}$ *es de dimensión uno, la matriz* A *correspondiente es el vector columna*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

luego la matriz de proyección es:

$$P_{W^{\perp}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(3)^{-1}(1 \;\; 1 \;\; -1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contenidos