Parcial I – Álgebra Lineal II

Septiembre 8 de 2009

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

i. El conjunto $\left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^k = 0 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}^+\right\}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

ii. Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : P_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$.

iii. Si V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ es una transformación lineal, $\dim N_T = \dim (V/R_T)$.

iv. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $V = N_T \oplus R_T$, entonces T es un isomorfismo.

(10 Puntos) **II**. Sea $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por $T(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$.

i. Encuentre N_T y R_T.

ii. Pruebe que $T^2 = T$, y entonces (si $v \in V$, $v = (v - T(v)) + T(v)$ implica que) $V = N_T \oplus R_T$.

iii. Para $n = 2$, encuentre la matriz de la transformación respecto a la base

$$\beta_{M_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

iv. Encuentre una base $\beta_{M/N}$ para $M_2(\mathbb{R})/R_T$, y la matriz de la transformación cociente

$$\pi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})/R_T.$$

v. Use la matriz de la transformación cociente calculada anteriormente para calcular $\pi(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

I.

i. Falso. El conjunto $\left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^k = 0 \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}^+\right\}$ *no* es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. En efecto, para $n = 2$, es facil ver que el conjunto no es cerrado bajo la suma: Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii. Falso. Si $T : P_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ es una transformación lineal, entonces

$$n + 1 = \dim P_n(\mathbb{R}) = \dim N_T + \dim R_T,$$

luego, para que la transformación sea sobreyectiva ($R_T = M_n(\mathbb{R})$) se debe verificar $n + 1 = \dim N_T + n^2$. Así (aun si $N_T = \{\vec{0}\}$) la afirmación solamente es cierta si $n + 1 \geq n^2$, es decir solamente para $n = 1$.

iii. Verdadero. Como $\dim(V/R_T) = \dim V - \dim R_T$ y, para toda transformación lineal sobre V, $\dim V = \dim N_T + \dim R_T$, tenemos que

$$\dim(V/R_T) = \dim N_T + \dim R_T - \dim R_T = \dim N_T.$$

iv. Falso. Cualquier transformación lineal $T : V \to V$ que satisface $T^2 = T$ verifica $N_T \cap R_T = \{\vec{0}\}$ y, entonces $V = N_T \oplus R_T$. Por ejemplo, cualquier proyección (sobre un plano o una recta que pase por el origen) $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene núcleo e imagen disyuntas, pero *no* es un isomorfismo. (Otro ejemplo es el dado en el punto **II**.)

II. Sea $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por $T(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$.

i. Es claro que $N_T = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\right\} = S_n(\mathbb{R})$ (matrices simétricas) y $R_T = A_n(\mathbb{R})$ (matrices antisimétricas).

ii. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$T^2(A) = T(T(A)) = T(\frac{1}{2}(A - A^T)) = \frac{1}{2}T(A - A^T) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A - A^T) - \frac{1}{2}(A - A^T)^T\right),$$

entonces

$$T^2(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A - A^T) - \frac{1}{2}(A^T - A)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2A - 2A^T)\right) = \frac{1}{2}(A - A^T) = T(A),$$

luego $T^2 = T$.
Ahora, escribiendo $v \in V$ como $v = (v - T(v)) + T(v)$ es facil ver que $T(v - T(v)) = T(v) - T(v) = 0$, luego $v - T(v) \in N_T$ y, en consecuencia, $V = N_T \oplus R_T$.

iii. Para $n = 2$ tomemos la base $\beta_{M_2} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Las primeras tres matrices son simétricas, luego $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in N_T$, y

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz respecto a la base dada es, entonces,

$$[M_T]_{\beta_{M_2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv. Para encontrar una base $\beta_{M/R}$ para $M_2(\mathbb{R})/R_T$, tomamos como base los elementos de la forma $M + R_T$, donde $M \notin R_T$, es decir:

$$\beta_{M/R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + R_T, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + R_T \right\}.$$

Ahora, la matriz de la transformación cociente

$$\pi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})/R_T : A \mapsto A + R_T,$$

usando esta base, es

$$M_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

v. Con la matriz de la transformación cociente calculada anteriormente, dado que $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, en la base de salida, se escribe como

$$[A]_{\beta_{M_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$[\pi(A)]_{\beta_{M/R}} = M_\pi [A]_{\beta_{M_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $\pi(A) = (0)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_T\right) + (-1)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + R_T\right) + (0)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + R_T\right)$, es decir

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_T,$$

resultado que puede verificarse directamente: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, pero $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in R_T$.