ÁLGEBRA LINEAL (HONORES) - PARCIAL 1

AGOSTO 28 DE 2012

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Considere el sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = -2. \end{cases}$$

(i) `1 Punto.` Escriba el sistema en la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A \in M_3(\mathbb{R})$ y $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
(ii) `3 Puntos.` Resuelva el sistema y diga si tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Si tiene solución única encuentre tal solución, si tiene infinitas soluciones encuentre todas las soluciones al sistema.[1]
(iii) `2 Puntos.` Haga una gráfica del conjunto de soluciones.
(iv) `2 Puntos.` ¿Es la matriz A invertible? —justifique su respuesta— Si lo es, encuentre su inversa.
(iv) `2 Puntos.` ¿Es el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ combinación lineal de los vectores columna de la matriz A? Si lo es, encuentre una combinación lineal.

2. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:
(i) `1 Punto.` Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz cuadrada, el conjunto W de soluciones al sistema lineal no homogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
(ii) `1 Punto.` Si A y B son matrices cuadradas invertibles, entonces $(A^T B)^{-1} = B^T (A^{-1})^T$.

$$\text{Considere los vectores } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(iii) `1 Punto.` $\mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$
(iv) `1 Punto.` El conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.
(v) `1 Punto.` $\dim \mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \dim \mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

[1] Recuerde que, si hay infinitas soluciones, la solución general se escribe como la suma de la solución general del sistema homogeneo asociado y una solución particular del sistema no homogeneo.