ÁLGEBRA LINEAL (HONORES) - PARCIAL 2

OCTUBRE 4 DE 2012

1. [*12 Puntos.*] Considere los espacios vectoriales $P_3[x]$ (polinomios de grado menor o igual a 3), $M_2(\mathbb{R})$ (matrices cuadradas 2×2) y la aplicación $T : P_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = \begin{pmatrix} a_0 - a_2 & a_1 + a_3 \\ a_1 + a_3 & a_0 + a_2 \end{pmatrix}$.

i. Demuestre que $B_P = \{x^3, x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1\}$ es una base para $P_3[x]$.
ii. Demuestre que $B_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $M_2(\mathbb{R})$.
iii. Demuestre que T es una transformación lineal.
iv. Encuentre $[q(x)]_{B_P}$, el vector de coordenadas de $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ respecto a la base B_P.
v. Encuentre $[M]_{B_P}^{B_M}$, la matriz asociada a la transformación lineal T respecto a las bases dadas.
vi. Encuentre $[T(q(x))]_{B_M}$, el vector de coordenadas de $T(q(x))$ respecto a la base B_M.
vii. Verifique que $[T(q(x))]_{B_M} = [M]_{B_P}^{B_M}[q(x)]_{B_P}$.
viii. Es T un isomorfismo? Si lo es, encuentre su inversa. Si no lo es encuentre su espacio nulo.

2. [*5 Puntos.*] Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si T_1 y T_2 son transformaciones lineales de V en V, entonces la aplicación $T_1 + T_2$ también es una transformación lineal.
ii. Si B_1 y B_2 son bases para un subespecie de un espacio vectorial V, entonces el conjunto $B_1 \cup B_2$ también es una base para el subespacio de V.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, A.A. 4976 BOGOTÁ, COLOMBIA.