ÁLGEBRA LINEAL (HONORES) - PARCIAL 3

OCTUBRE 18 DE 2012

1. [*6 Puntos.*] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T^3 = T \circ T \circ T = 0$ y considere un vactor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T^2(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

i. Demuestre que $B = \{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x})\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.
ii. Encuentre la matriz de la transformación lineral asociada a la base B.
iii. ¿Existe alguna base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de la transformación lineal sea diagonal?
iv. De un ejemplo explícito de una transformación lineal sobre $\mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones del problema.

2. [*5 Puntos.*] Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Demuestre que A no es invertible.
ii. Demuestre que A es diagonalizable.
iii. Encuentre una matriz D diagonal y una matriz C invertible tales que $A = CDC^{-1}$.
iv. Use el resultado anterior para calcular $A^7\vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
v. Calcule, usando la diagonalización encontrada, A^9.

3. [*6 Puntos.*] Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si A es una matriz cuadrada invertible, entonces A^TA y AA^T también son matrices invertibles.
ii. Si A es una matriz cuadrada, entonces A^TA y AA^T tienen los mismos valores propios.
iii. Si A es una matriz cuadrada, entonces A^TA y AA^T tienen los mismos vectores propios.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, A.A. 4976 Bogotá, Colombia.