Álgebra Lineal (Honores) – *Tarea 3*

Octubre 21 de 2014

1. Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

i. La aplicación $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, definida por $T(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$, es diagonalizable.

ii. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ son similares.

iii. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ son diagonalizables.

iv. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ son simultáneamente diagonalizables.

v. Existe una transformación lineal diagonalizable $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con valores propios $\pm i$.

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz con polinomio característico $p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.

i. Pruebe que $a_0 = \det A$, es decir que $a_0 \neq 0$ si y solamente si A es invertible.

ii. Pruebe que $p_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \cdots (a_{nn} - t) + q(t)$, donde $q(t)$ es un polinomio de grado a lo más $n - 2$.

iii. Pruebe que $\mathrm{Tr}(A) = (-1)^{n-1} a_{n-1}$.

iv. Pruebe que, si A es diagonalizable y sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$,

$$\det A = \lambda_1^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \cdots \lambda_k^{\mu_k},$$

donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ denota la(s) multiplicidad(es) del valor propio correspondiente.

v. Pruebe que, si A es diagonalizable y sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$,

$$\mathrm{Tr} A = \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \cdots + \mu_k \lambda_k,$$

donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ denota la(s) multiplicidad(es) del valor propio correspondiente.

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible.

i. Pruebe que si λ es valor propio de A, entonces λ^{-1} es valor propio de su inversa A^{-1}. ¿ Tienen A y su inversa A^{-1} vectores propios comunes?

ii. Pruebe que si A es diagonalizable, entonces su inversa A^{-1} es diagonalizable.

iii. Pruebe que si A es diagonalizable, entonces su transpuesta A^T es diagonalizable. ¿ Tienen A y su transpuesta A^T vectores propios comunes?

1.

i. Verdadero. Como se vio en la tarea anterior, la matriz respecto a una base de $M_n(\mathbb{R})$ formada por la unión de una base de las matrices simétricas y una de matrices antisimétricas es

$$[M_T]_{\beta_{M_n(\mathbb{R})}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces la transformación es diagonalizable.

ii. Falso. Dado que el determinante de dos matrices similares es el mismo, y que $\det A = 0$ mientras que $\det B = 5$, las matrices A y B no pueden ser similares.

iii. Verdadero. Los tres valores propios para la matriz A son $\lambda_1^A = 0$, $\lambda_2^A = 3$ y $\lambda_3^A = 5$, así que (por ser todos distintos) A es diagonalizable. Para B los valores propios son $\lambda_1^B = \lambda_2^B = -1$ y $\lambda_3^B = 5$, y una base para $\mathbb{R}^3$ de vectores propios para B es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, así que B también es diagonalizable.

iv. Falso. Dos matrices son simultáneamente diagonalizables si y solo si conmutan. Sin embargo, aunque ambas son simétricas,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 8 & 15 & -7 \\ -7 & -10 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 5 & 15 & -10 \\ -4 & -7 & 3 \end{pmatrix} = BA.$$

iii. Verdadero. La base para $\mathbb{C}^2$ formada por los vectores 1 e i permite definir la transformación lineal dada por $T(1) = i$ y $T(i) = 1$, cuyos valores propios son $\pm i$ y que, en esta base, tiene matriz diagonal $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ su polinomio característico.

i. Dado que $p_A(t) = \det(A - tI)$, es claro que $p_A(0) = a_0 = \det A$, es decir que A es invertible si y solamente si $a_0 \neq 0$.

ii. Para ver que

$$p_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \cdots (a_{nn} - t) + q(t),$$

donde $q(t)$ es un polinomio de grado a lo más $n-2$, procedemos por inducción en el tamaño de A. Es claro que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{pmatrix} = (a_{11} - t)(a_{22} - t) + q(t),$$

donde $q(t) = -a_{12}a_{21}$ es un polinomio de grado 0, así que la afirmación es cierta para matrices 2×2. Si suponemos el resultado cierto para toda matriz $(k-1) \times (k-1)$ y A es una matriz $k \times k$, calculando por la última columna tenemos

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} - t \end{pmatrix} = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \cdots (a_{nn} - t) + q(t),$$

donde $q(t)$ es un polinomio de grado a lo más $n-2$, ya que cada cofactor para a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, elimina el término $a_{ii} - t$ y el término $a_{kk} - t$ en el determinante correspondiente y usamos la hipótesis de inducción en el último término.

iii. Para demostrar que $\mathrm{Tr}(A) = (-1)^{n-1}a_{n-1}$ se puede, como en el ejercicio anterior, proceder por inducción en el tamaño de la matriz.

iv. Si A es diagonalizable y sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, existe una matriz invertible C tal que

$$A = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1},$$

así que si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ denota la multiplicidad del valor propio correspondiente, i.e. el número de veces que el valor propio aparece en la matriz diagonal,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_k^{\mu_k}.$$

v. Si A es diagonalizable y sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, dado que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ para cualquier par de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &= \mathrm{Tr}\left(C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} \right) \\ &= \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \cdots + \mu_k\lambda_k, \end{aligned}$$

donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ denota la multiplicidad del valor propio correspondiente.

3.

i. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible, entonces ninguno de sus valores propios es cero y, si λ es valor propio de A, i.e. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ para algún vector no nulo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\vec{x} = A^{-1}A\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x},$$

es decir que $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$ y entonces λ^{-1} es valor propio de su inversa A^{-1}. El argumento anterior muestra que A y su inversa A^{-1} tienen vectores propios comunes.

ii. Si A es diagonalizable existe una matriz invertible C tal que $A = CDC^{-1}$, donde la matriz diagonal D es la matriz de valores propios para A. Como A es invertible la matriz diagonal D también lo es, y podemos calcular su inversa A^{-1} como

$$A^{-1} = (CDC^{-1})^{-1} = CD^{-1}C^{-1},$$

luego A^{-1} también es diagonalizable.

iii. Si A es diagonalizable entonces $A = CDC^{-1}$, donde la matriz invertible C es la de vectores propios de A y la matriz diagonal D es la matriz de valores propios para A. Haciendo una trasposición tenemos que

$$A^T = (CDC^{-1})^T = (C^T)^{-1}D^TC^T,$$

luego A^T también es diagonalizable. El argumento muestra que, a pesar de tener valores propios comunes, A y su transpuesta A^T no necesariamente tienen vectores propios comunes. Un ejemplo sencillo lo dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son 1 y 2, pero cuyos vectores pripios son $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, respectivamente.