Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 50 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. i. Demuestre que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+4y^2}$ *no* existe.

   ii. Demuestre que el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle x^2y, xz^2, xyz\rangle$ *no* es un rotacional.

   (6 puntos)

2. Un campo escalar $f(x,y)$ tiene, en el punto $(1,2)$, derivadas direccionales iguales a 2 en la dirección del vector unitario $\langle 1,0\rangle$, y 3 en la dirección del vector unitario $\langle 0,-1\rangle$.

   i. Halle $\vec{\nabla} f(1,2)$.

   ii. Calcule la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$ y en la dirección del vector unitario $\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$.

   (6 puntos)

3. i. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 2x + y^2 - 3y + 5$ en el punto $(1,2,5)$.

   ii. Encuentre la recta normal a la superficie $z = 2x + y^2 - 3y + 5$ en el punto $(1,2,5)$.

   (6 puntos)

4. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + y$ en la región del plano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. (6 puntos)

5. Considere la curva en el plano $c(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t\rangle$ y la función de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$.

   i. Calcule $c(\frac{\pi}{6})$ y encuentre la recta tangente a la curva $c(t)$ en ese punto. Haga una gráfica.

   ii. Encuentre la recta tangente a la curva $\sigma(t) = f(c(t))$, la imagen de la curva $c(t)$ bajo la función f, en el punto $f(c(\frac{\pi}{6}))$.

   (6 puntos)

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo 1 hora y 50 minutos.**

Nombre: ____________________________ Código: ______________

1. i. Demuestre que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{4x^2-y^2}$ *no* existe.

   ii. Demuestre que el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle 2y, -2x, xy\rangle$ *no* es el gradiente de un campo escalar.

   (6 puntos)

2. Un campo escalar $f(x,y)$ tiene derivadas direccionales en el punto $(1,2)$ iguales a 3 en la dirección del vector unitario $\langle 1,0\rangle$, y -2 en la dirección del vector unitario $\langle 0,-1\rangle$.

   i. Halle $\vec{\nabla} f(1,2)$.

   ii. Calcule la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$ y en la dirección del vector unitario $\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$.

   (6 puntos)

3. i. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 2x^2+y^2-3y+5$ en el punto $(1,2,5)$.

   ii. Encuentre la recta normal a la superficie $z = 2x^2+y^2-3y+5$ en el punto $(1,2,5)$.

   (6 puntos)

4. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2+y^2+x-2y$ en la región del plano $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 5\}$. (6 puntos)

5. Considere la curva en el plano $c(t) = \langle 2\operatorname{sen} t, \cos t\rangle$ y la función de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$.

   i. Calcule $c(\frac{\pi}{3})$ y encuentre la recta tangente a la curva $c(t)$ en ese punto. Haga una gráfica.

   ii. Encuentre la recta tangente a la curva $\sigma(t) = f(c(t))$, la imagen de la curva $c(t)$ bajo la función f, en el punto $f(c(\frac{\pi}{3}))$.

   (6 puntos)

Parcial I – Cálculo Vectorial

Solución

1. Tema A.

i. Para verificar que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+4y^2}$ no existe podemos ver que el valor de tal límite depende del camino usado. Por ejemplo, el límite sería 2 si tomamos como camino el eje x, $-\frac{1}{4}$ si lo calculamos sobre el eje y pero, por ejemplo, calculando por la recta $y = \sqrt{2}x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{9x^2} = 0,$$

así que el límite *no* existe.

ii. El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle x^2y, xz^2, xyz\rangle$ no es un rotacional porque su divergencia es igual a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}} = 2xy + 0 + xy = 3xy \neq 0,$$

y de ser un rotacional debería ser igual a cero ($\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}) = 0$ para cualquier campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$).

Tema B.

i. Igual que antes, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{4x^2-y^2}$ sería 0 si tomamos como camino el eje x o el eje y pero, por ejemplo, calculando sobre la recta $y = \sqrt{2}x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{-\sqrt{2}x^2}{2x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

así que el límite *no* existe.

ii. El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle 2y, -2x, xy\rangle$ no es el gradiente de un campo escalar porque su rotacional es igual a

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}} = \langle x, -2, -4\rangle \neq \vec{0},$$

y de ser un gradiente debería ser igual a cero ($\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = \vec{0}$ para cualquier campo escalar f).

2. Tema A. Sea $f(x,y)$ un campo escalar cuyas derivadas direccionales, en el punto $(1,2)$, son iguales a 2 en la dirección del vector unitario $\langle 1,0\rangle$, y 3 en la dirección del vector unitario $\langle 0,-1\rangle$.

i. Como, por definición la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{x} = \langle a,b\rangle$ es

$$Df_{\vec{x}}(1,2) = (\vec{\nabla}f(1,2))\cdot\vec{x} = a\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + b\frac{\partial f}{\partial y}(1,2),$$

podemos deducir que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -3$, luego

$$\vec{\nabla}f(1,2) = \langle 2, -3\rangle.$$

ii. La derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$ y en la dirección del vector unitario $\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$ es entonces

$$Df_{\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle}(1,2) = (\vec{\nabla} f(1,2)) \cdot \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle = \frac{3}{5}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{4}{5}\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{6}{5}.$$

Tema B. i. $\vec{\nabla} f(1,2) = \langle 3, 2\rangle$ y ii. $\frac{17}{5}$.

3. Tema A.

i. La ecuación del plano tangente a la superficie $z = 2x + y^2 - 3y + 5$ en el punto $P = (1,2,5)$ se puede calcular como

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P (x-1) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P (y-2) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P (z-5) = 0,$$

donde $F(x,y,z) = z - 2x - y^2 + 3y - 5$. Calculando las derivadas parciales de F tenemos que esta ecuación es

$$(-2)(x-1) + (-1)(y-2) + (1)(z-5) = 0,$$

así que la ecuación del plano deseado es $2x + y - z = -1$.

ii. Como el vector normal al plano tangente a la superficie $z = 2x + y^2 - 3y + 5$ en el punto $P = (1,2,5)$ es $\vec{n} = \langle 2, 1, -1\rangle$, la recta normal a la superficie en tal punto es la dada por la ecuación vectorial

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{n} = \langle 1,2,5\rangle + t\langle 2,1,-1\rangle.$$

Tema B. i. $4x + y - z = 1$ y ii. $\vec{x} = \langle 1,2,5\rangle + t\langle 4,1,-1\rangle$.

4. Tema A. Podemos encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + y$ en la región del plano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ buscando los puntos críticos al interior del disco D y sobre su frontera, evaluando en la función para encontrar la respuesta.

(i) Los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + y$ al interior del disco D se encuentran donde sus derivadas parciales se anulan simultaneamente. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 1 = 0,$$

debemos verificar que $x = \frac{1}{2}$ y $y = -\frac{1}{2}$, es decir que el único punto crítico es $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Para clasificar tal punto crítico debemos calcular el determinante de la matriz de segundas derivadas:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0,$$

así que, como en el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ el detreminante es positivo, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = 2 > 0$, el punto crítico en cuestión es un *mínimo*.

(ii) La restricción es la función $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, así que $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, i.e.

$$\langle 2x - 1, 2y + 1\rangle = \lambda\langle 2x, 2y\rangle,$$

lo que nos da dos ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-1 &= 2\lambda x \\ 2y+1 &= 2\lambda y. \end{cases}$$

Despejando λ tenemos que

$$\lambda = \frac{2x-1}{2x} = \frac{2y+1}{2y},$$

luego

$$x = -y,$$

es decir que, si usamos la restricción, tenemos que

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}},$$

así que la función f podría alcanzar su máximo/mínimo en los puntos $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ o $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$. Finalmente, evaluamos f en los tres puntos anteriores, obteniendo:

$$f(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}) = 1-\sqrt{2}, \qquad f(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}) = 1+\sqrt{2}, \qquad f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2},$$

luego los valores extremos de la función son éstos dos últimos.

Tema B. El mínimo está en $(-\frac{1}{2}, 1)$ y es -1, el máximo está en $(1,-2)$ y es 10.

5. Tema A.

i. Evaluando directamente tenemos $c(\frac{\pi}{6}) = \langle 2\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\rangle = \langle\sqrt{3}, \frac{1}{2}\rangle$ y, entonces, la recta tangente a la curva $c(t)$ en ese punto es la que tiene vector director $c'(\frac{\pi}{6}) = \langle -2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}\rangle = \langle -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$, es decir la dada por la ecuación vectorial

$$\vec{x} = \langle\sqrt{3}, \frac{1}{2}\rangle + t\langle -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle, \qquad t\in\mathbb{R},$$

que, en coordenadas (x,y) del plano, se escribe como $3x + 2\sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$.

ii. La imagen de la curva en el plano $c(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t\rangle$ bajo la función de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$ es $\sigma(t) = \langle 4\cos^2 t + 1, \operatorname{sen}^2 t\rangle$. La recta tangente a la curva $\sigma(t) = f(c(t))$, en el punto $f(c(\frac{\pi}{6}))$ es la que tiene vector director $\langle -2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$, como puede verse directamente a partir de la fórmula anterior, o usando la regla de la cadena:

$$\sigma'\left(\frac{\pi}{6}\right) = Df\left(c(\frac{\pi}{6})\right)c'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}_{(\sqrt{3},\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Así, tal recta est dada por la ecuacin

$$\vec{x} = \langle 4, \frac{1}{4}\rangle + t\langle -2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle, \qquad t\in\mathbb{R},$$

que, en coordenadas (x,y) del plano, se escribe como $x+4y=5$. Nótese que, en efecto, tal relación se establece facilmente a partir de las coordenadas de $\sigma(t)$.

Tema B. i. $c'(\frac{\pi}{3}) = \langle 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$ y $3x+2\sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$, ii. $\langle 2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$ es el vector director y $x+4y=5$.