Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo 1 hora y 50 minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Considere la superficie S dada por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = r,$$

para $0 \le r \le 2$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

   i. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(1,0,1)$.
   ii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(1,0,1)$.
   iii. Calcule el área la superficie.
   iv. Calcule $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$, para $\vec{\mathbf{F}}(x,y,x) = \langle x, x+y, x\rangle$, con la orientación determinada por la normal exterior.

   (12 puntos)

2. Considere la región D del plano limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación $T(u,v) = (v, u/v)$.

   i. Dibuje la región D en el plano x-y y la región D_o en el plano u-v tal que $T(D_o) = D$.
   ii. Use lo anterior para calcular la integral $\iint_D x^3 y\, dA$.

   (6 puntos)

3. Halle la componente z del centro de masa un hemisferio sólido homogéneo (de densidad constante) y de radio 2 en $\mathbb{R}^3$, definido por $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ y $z \ge 0$. (6 puntos)

4. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta:

   i. El área de la valla dada por las ecuaciones $x = y$ y $z = e^x$, para $0 \le x \le 1$, es igual a $\sqrt{2}e$.
   ii. Si $\vec{\mathbf{F}} = \langle 1, z, y\rangle$ y c es el camino que va en linea recta de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$ y luego en linea recta de $(1,0,0)$ a $(1,1,0)$, entonces $\int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = 1$.

   (6 puntos)

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 50 **minutos.**

Nombre: ____________________ Código: ____________

1. Considere la superficie S dada por

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r^2,$$

para $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   i. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(0, 1, 1)$.
   ii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(0, 1, 1)$.
   iii. Calcule el área la superficie.
   iv. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$, para $\vec{\mathbf{F}}(x, y, x) = \langle -y, x, z\rangle$, con la orientación determinada por la normal exterior.

   (12 puntos)

2. Considere la región D del plano limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, y las rectas $x = 2$ y $x = 4$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación $T(u, v) = (v, u/v)$.

   i. Dibuje la región D en el plano x-y y la región D_o en el plano u-v tal que $T(D_o) = D$.
   ii. Use lo anterior para calcular la integral $\displaystyle\iint_D x^3 y\, dA$.

   (6 puntos)

3. Halle la componente z del centro de masa de un hemisferio sólido homogéneo (de densidad constante) y de radio 4 en $\mathbb{R}^3$, definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ y $z \geq 0$. (6 puntos)

4. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta:

   i. El área de la valla dada por las ecuaciones $x = y$ y $z = \mathrm{sen}^2 x$, para $0 \leq x \leq \pi$, es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.
   ii. Si $\vec{\mathbf{F}} = \langle 1, z, y\rangle$ y c es el camino que va en linea recta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$ y luego en linea recta de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$, entonces $\displaystyle\int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = 0$.

   (6 puntos)

Parcial II – Cálculo Vectorial

Solución

1. Tema A.

i. Para encontrar la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie S dada por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y $z = r$, en el punto $(1, 0, 1)$, debemos calcular un vector normal a la superficie en ese punto, es decir cuando $r = 1$ y $\theta = 0$. Para ello calculamos el producto cruz de los vectores $\vec{\mathbf{T}}_r = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1\rangle$ y $\vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle -r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0\rangle$, obteniendo $\vec{\mathbf{n}}(r,\theta) = \langle -r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r\rangle$. Así, $\vec{\mathbf{n}}(1, 0) = \langle -1, 0, 1\rangle$, luego la ecuación de la recta es

$$\vec{x} = \langle 1, 0, 1\rangle + t\langle -1, 0, 1\rangle.$$

ii. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 0, 1)$, según lo hecho anteriormente, está dada por $\vec{\mathbf{n}} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_o) = 0$, es decir

$$\langle -1, 0, 1\rangle \cdot \langle x - 1, y - 0, z - 1\rangle = 0,$$

luego $x = z$.

iii. El área la superficie es $A(S) = \displaystyle\iint_D \|\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta\| dr d\theta$, donde D es el dominio de la parametrización $(0 \le r \le 2 \ \text{ y } \ 0 \le \theta \le 2\pi)$. Entonces,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{2r^2} dr d\theta = \sqrt{2}\iint_D r dr d\theta = \sqrt{2}A(D) = 4\sqrt{2}\pi.$$

iv. Finalmente,

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(r,\theta)) \cdot \vec{\mathbf{T}}_\theta \times \vec{\mathbf{T}}_r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2(1 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos\theta) dr d\theta = \frac{16\pi}{3}.$$

Tema B.

i. Para encontrar la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie S dada por $x = r\operatorname{sen}\theta$, $y = r\cos\theta$ y $z = r^2$, en el punto $(0, 1, 1)$, debemos calcular un vector normal a la superficie en ese punto, es decir cuando $r = 1$ y $\theta = 0$. Para ello calculamos el producto cruz de los vectores $\vec{\mathbf{T}}_r = \langle \operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 2r\rangle$ y $\vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, 0\rangle$, obteniendo $\vec{\mathbf{n}}(r,\theta) = \langle 2r^2\operatorname{sen}\theta, 2r^2\cos\theta, -r\rangle$. Así, $\vec{\mathbf{n}}(1, 0) = \langle 0, 2, -1\rangle$, luego la ecuación de la recta es

$$\vec{x} = \langle 0, 1, 1\rangle + t\langle 0, 2, -1\rangle.$$

ii. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 0, 1)$, según lo hecho anteriormente, está dada por $\vec{\mathbf{n}} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_o) = 0$, es decir

$$\langle 0, 2, -1\rangle \cdot \langle x - 0, y - 1, z - 1\rangle = 0,$$

luego $2y - z = 1$.

iii. El área la superficie es $A(S) = \iint_D \|\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta\| dr d\theta$, donde D es el dominio de la parametrización $(0 \leq r \leq 2 \;\text{ y }\; 0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Entonces,

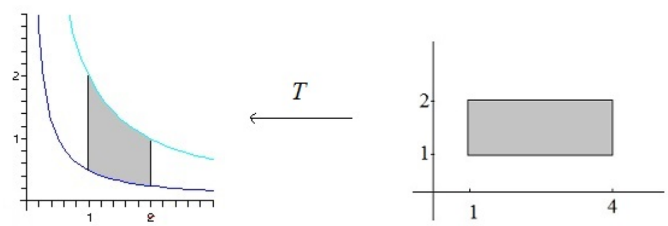
$$A(S) = \iint_D r\sqrt{4r^2+1}\, dr d\theta = 2\pi \int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}\, dr = 2\pi \left(\frac{17^{\frac{3}{2}} - 1}{12} \right).$$

iv. Finalmente,

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(r,\theta)) \cdot \vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^3 dr d\theta = -8\pi.$$

2. Tema A.

i. Sea D la región del plano limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación $T(u,v) = (v, u/v) = (x,y)$. La región D en el plano x-y y la región D_o en el plano u-v tal que $T(D_o) = D$ son las mostradas en la siguiente gráfica:

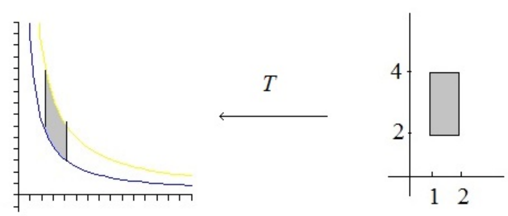


ii. El Jacobiano de la transformación $x = v, y = \frac{u}{v}$ es $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{v}$, así que

$$\iint_D x^3 y \, dA = \iint_{D_o} uv \, du \, dv = \int_1^2 \int_1^4 uv \, du \, dv = \frac{45}{4}.$$

Tema B.

i. Sea D la región del plano limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación $T(u,v) = (v, u/v) = (x,y)$. La región D en el plano x-y y la región D_o en el plano u-v tal que $T(D_o) = D$ son las mostradas en la siguiente gráfica:



ii. El Jacobiano de la transformación $x = v, y = \frac{u}{v}$ es $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{v}$, así que

$$\iint_D x^3 y \, dA = \iint_{D_o} uv \, du \, dv = \int_2^4 \int_1^2 uv \, du \, dv = 9.$$

3. Tema A.

La componente z del centro de masa un hemisferio sólido homogéneo, de densidad constante k y de radio 2 en $\mathbb{R}^3$, definido por $\quad x^2+y^2+z^2 \leq 4 \quad$ y $\quad z \geq 0$, se calcula como $\bar{z} = \dfrac{\iiint_V k\, z\, dV}{M}$, donde $M = \frac{16}{3}\pi k$ es la masa del sólido. Como

$$\iiint_V k\, z\, dV = k \iiint_V z\, dV = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \cos\phi \,\mathrm{sen}\phi \, d\rho d\theta d\phi = 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^3 \cos\phi \,\mathrm{sen}\phi \, d\rho d\phi = 4k\pi,$$

tenemos que $\bar{z} = \frac{3}{4}$.

Tema B.

La componente z del centro de masa un hemisferio sólido homogéneo, de densidad constante k y de radio 2 en $\mathbb{R}^3$, definido por $\quad x^2+y^2+z^2 \leq 16 \quad$ y $\quad z \geq 0$, se calcula como $\bar{z} = \dfrac{\iiint_V k\, z\, dV}{M}$, donde $M = \frac{128}{3}\pi k$ es la masa del sólido. Como

$$\iiint_V k\, z\, dV = k \iiint_V z\, dV = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^4 \rho^3 \cos\phi \,\mathrm{sen}\phi \, d\rho d\theta d\phi = 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \rho^3 \cos\phi \,\mathrm{sen}\phi \, d\rho d\phi = k\frac{128}{2}\pi,$$

tenemos que $\bar{z} = \frac{3}{2}$.

4. Tema A.

i. Falso. El área de la valla dada por las ecuaciones $x = y$ y $z = e^x$, para $0 \leq x \leq 1$, se calcula con la integral de linea $A = \displaystyle\int_c z\, ds$, donce c es el camino plano dado por la ecuación $x = y$ para $0 \leq x \leq 1$, que podemos parametrizar con $\sigma(t) = \langle t, t, 0\rangle$ donde $t \in [0,1]$. Entonces

$$A = \int_c z\, ds = \int_0^1 e^t \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^1 e^t dt = \sqrt{2}(e-1).$$

ii. Verdadero. Como el campo $\vec{\mathbf{F}} = \langle 1, z, y\rangle$ es el gradiente de la función $f(x,y,z) = x + yz$, la integral de linea solo depende de los puntos extremos: $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$. En efecto

$$\int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = f(1,1,0) - f(0,0,0) = 1.$$

Tema B.

i. Verdadero. El área de la valla dada por las ecuaciones $x = y$ y $z = \mathrm{sen}^2 x$, para $0 \leq x \leq \pi$, se calcula con la integral de linea $A = \displaystyle\int_c z\, ds$, donce c es el camino plano dado por la ecuación $x = y$ para $0 \leq x \leq \pi$, que podemos parametrizar con $\sigma(t) = \langle t, t, 0\rangle$ donde $t \in [0, \pi]$. Entonces

$$A = \int_c z\, ds = \int_0^1 \mathrm{sen}^2 t \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^1 \mathrm{sen}^2 t dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

ii. Falso. Como el campo $\vec{\mathbf{F}} = \langle 1, z, y\rangle$ es el gradiente de la función $f(x,y,z) = x + yz$, la integral de linea solo depende de los puntos extremos: $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$. En efecto

$$\int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = f(1,1,0) - f(0,0,0) = 1.$$