Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   i. Diga si f es continua en $(0,0)$. Explique.
   ii. Encuentre la dirección de máximo crecimiento de la función en el punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

   (6 puntos)

2. i. Encuentre el vector posición y el vector velocidad a la curva $\mathbf{c}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t^2 \rangle$ en $t = \frac{\pi}{2}$.
   ii. Encuentre el ángulo entre las curvas $\mathbf{c}_1(t) = \langle t, 1-t, 3+t^2 \rangle$ y $\mathbf{c}_2(s) = \langle 3-s, s-2, s^2 \rangle$, $t, s \in \mathbb{R}$, en el punto en que se cruzan.

   (6 puntos)

3. Considere la superficie de la esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ en $\mathbb{R}^3$.

   i. Escriba la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas.
   ii. Encuentre los puntos de la esfera en los que su plano tangente es completamente horizontal.
   iii. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 3, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

   (6 puntos)

4. Considere la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$.

   i. Encuentre los puntos críticos de la función.
   ii. Diga cuáles de los puntos encontrados son *extremos* (máximos o mínimos locales) de f y cuáles son puntos de silla.

   (6 puntos)

5. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle y^3, xy, -z \rangle$.

   i. Calcule la divergencia de $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Calcule el rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$.
   iii. Diga si el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es un gradiente (i.e. si $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$ para algún campo escalar f).

   (6 puntos)

Solución

1. i. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en $(0,0)$, pues $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$, como puede verificarse fácilmente cambiando a coordenadas polares y usando la regla de l'Hôpital.

   ii. La dirección de máximo crecimiento de la función en el punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ se calcula evaluando allí el gradiente de la función:

$$\vec{\nabla} f(x,y) \mid_{(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})} = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \mid_{(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})} = \langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rangle.$$

2. i. El vector posición de la curva $\mathbf{c}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t^2 \rangle$ en $t = \frac{\pi}{2}$ se encuentra evaluando la función en tal valor del parámetro:

$$\mathbf{c}(\frac{\pi}{2}) = \langle 0, 1, \frac{\pi^2}{4} \rangle.$$

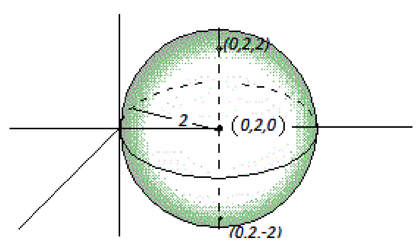
   De igual forma, el vector velocidad a la curva se encuentra evaluando la derivada $\mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 2t \rangle$ en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{v}(\frac{\pi}{2}) = \langle -1, 0, \pi \rangle.$$

   ii. El ángulo entre dos curvas en un punto común es, por definición, el ángulo que hacen sus respectivos vectores tangentes en tal punto. Si $\mathbf{c}_1(t) = \langle t, 1-t, 3+t^2 \rangle$ y $\mathbf{c}_2(s) = \langle 3-s, s-2, s^2 \rangle$, $t, s \in \mathbb{R}$, el punto en que se cruzan se encuantra igualando sus respectivas componentes: $t = 3-s$, $1-t = s-2$ y $3+t^2 = s^2$. Se obtiene entoncers que se cruzan cuando $t = 1$ y $s = 2$, i.e. $\mathbf{c}_1(1) = \langle 1, 0, 4 \rangle = \mathbf{c}_2(2)$, donde se encuentra que $\mathbf{c}_1'(1) = \langle 1, -1, 2 \rangle$ y $\mathbf{c}_2'(2) = \langle -1, 1, 4 \rangle$, luego

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{c}_1'(1) \cdot \mathbf{c}_2'(2)}{|\mathbf{c}_1'(1)||\mathbf{c}_2'(2)|} \right) = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Considere la superficie de la esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ en $\mathbb{R}^3$.



   i. La ecuación de la esfera en coordenadas esféricas se encuentra fácilmente escribiéndola primero como $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ y luego usando $y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ junto con la identidad $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Tenemos entonces $\rho = 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$.

   ii. Los puntos de la esfera en los que su plano tangente es completamente horizontal, como lo ilustra la gráfica, son $(0,2,2)$ y $(0,2,-2)$. Lo anterior puede verificarse sabiendo que el gradiente de la función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y$ da un vector normal al plano tangente en cada punto, así que

$$\vec{\nabla} F(x,y,z) = \langle 2x, 2y-4, 2z \rangle = \langle 0, 0, \alpha \rangle,$$

   para $\alpha \neq 0$, en los puntos buscados. Así, $2x = 0$, $2y = 4$ y $2z = \alpha$ lo que, en la ecuación de la esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$, da como resultado los puntos ya mencionados.

iii. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 3, \sqrt{\frac{3}{2}})$ se encuentra, al igual que en el punto anterior, calculando el vector normal al plano en tal punto:

$$\vec{\nabla} F(x,y,z) \mid_{(\sqrt{\frac{3}{2}},3,\sqrt{\frac{3}{2}})} = \langle 2x, 2y-4, 2z \rangle \mid_{(\sqrt{\frac{3}{2}},3,\sqrt{\frac{3}{2}})} = \langle \sqrt{6}, 2, \sqrt{6} \rangle,$$

lo que nos da como resultado $\sqrt{6}(x-\sqrt{\frac{3}{2}}) + 2(y-3) + \sqrt{6}(z-\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0$, es decir, $\sqrt{6}x + 2y + \sqrt{6}z = 12$.

4. Considere la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$.

i. Para encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y)$ calculamos su gradiente y lo igualamos a cero:

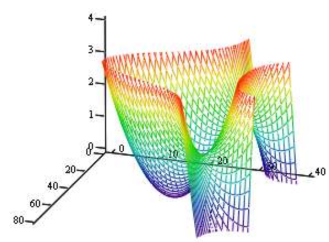
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \langle 2x - 2xy, 4y - x^2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle,$$

lo que implica que $2x(1-y) = 0$ y $4y = x^2$. La primera opción es que $x = 0$, caso en el cual la segunda ecuación implica que $y = 0$ y nos da como primer punto crítico $(0,0)$; la segunda opción es que $y = 1$, caso en el cual la segunda ecuación da dos posibilidades $x = \pm 2$ y, en consecuencia, dos puntos críticos más, $(2, 1$ y $(-2, 1)$.

ii. Los puntos críticos son *extremos* (máximos o mínimos locales) de f cuando el determinante de la matriz de segundas derivadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

es positivo, lo cual es cierto en $(0,0)$, el cual es un mínimo local pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ en ese punto. Para los dos puntos críticos restantes tal determinante es negativo, luego son puntos de silla.



5. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle y^3, xy, -z \rangle$.

i. La divergencia de $\vec{\mathbf{F}}$ es $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = x - 1$.

ii. El rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ es $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \langle 0, 0, y - 3y^2 \rangle$.

iii. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ *no* es un gradiente porque $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \neq \vec{0}$.