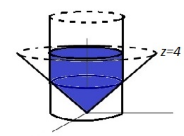
> Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. La figura ilustra un cuerpo sólido limitado por las superficies del cono $z^2 = 2(x^2 + y^2)$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, entre $z = 0$ y $z = 4$. Encuentre las coordenadas del centro de masa del sólido si su densidad de masa es $\rho(x, y, z) = z$.



   (8 puntos)

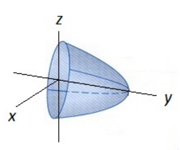
2. Calcule la integral
$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\, dA,$$
donde la región D es el rombo con vértices $(0, 2), (1, 3), (2, 2)$ y $(1, 1)$. (6 puntos)

3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \rangle$ y el círculo $\mathbf{c}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$, para $t \in [0, 2\pi]$.

   i. Demuestre que $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi$.
   ii. Use lo anterior para explicar por qué el campo vectorial $\mathbf{F}$ *no* es conservativo, i.e. no existe un campo escalar f tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$.

   (8 puntos)

4. Considere la superficie S del paraboloide $y = 4 - x^2 - z^2$ para $0 \le y \le 4$.



   i. Demuestre que el punto $(1, 2, 1)$ se encuentra en la superficie.
   ii. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(1, 2, 1)$.
   iii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(1, 2, 1)$.
   iv. Calcule el área de la superficie.
   v. Calcule la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle 1, y, 1 \rangle$.

   (10 puntos)

Solución

1. Primero calculamos la masa del sólido a través de la integral $M = \int_V \rho(x,y,z)dV$, donde en coordenadas cilíndricas los límites son $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\sqrt{2}r \le z \le 4$ y la densidad es $\rho(x,y,z) = z$:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{2}r}^4 zr\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{2}r}^4 rdr = 2\pi\left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 24\pi.$$

Por simetría, es claro que el centro de masa del sólido tiene componentes $\bar{x} = \bar{y} = 0$, luego solo hace falta calcular $\bar{z} = \frac{1}{M}\int_V z\rho(x,y,z)dV$:

$$\bar{z} = \frac{1}{24\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{2}r}^4 z^2r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{12}\int_0^2\left[\frac{z^3}{3}\right]_{\sqrt{2}r}^4 rdr = \frac{1}{12}\left[\frac{64r^2}{6} - \frac{2^{3/2}r^5}{15}\right]_0^2 = \left(\frac{128}{36} - \frac{32\sqrt{2}}{90}\right) \cong 3,05.$$

2. La integral $\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dA$, donde la región D es el rombo con vértices $(0,2), (1,3), (2,2)$ y $(1,1)$, puede calcularse facilmente haciendo el cambio de variable

$$u = x - y, \quad v = x + y,$$

cuyo Jacobiano es $|J| = \frac{1}{2}$, obteniendo como región de integración $-2 \le u \le 0,\ 2 \le v \le 4$. Así,

$$\iint_D (x-y)^2\,dA = \frac{1}{2}\int_2^4\int_{-2}^0 \frac{u}{v}\,du\,dv = -\int_2^4 \frac{1}{v}\,dv = [-\ln v]_2^4 = \ln 2 - \ln 4.$$

3.

i. Sea $\mathbf{F} = \langle\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\rangle$ y consideremos la parametrización del círculo $\mathbf{c}(t) = \langle\cos t, \operatorname{sen} t\rangle$, para $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que, por definición,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt = \int_0^{2\pi}\langle -\operatorname{sen} t, \cos t\rangle\cdot\langle -\operatorname{sen} t, \cos t\rangle dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

ii. El campo vectorial $\mathbf{F}$ *no* puede ser conservativo, i.e. no existe un campo escalar f tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla}f$: Si lo fuera, por el teorema fundamental de las integrales de línea,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \vec{\nabla}f\cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(0)) - f(\mathbf{c}(2\pi)) = 0,$$

dado que la curva es cerrada.

4.

i. Primero, dado que $2 = 4 - 1 - 1$, el punto $(1,2,1)$ se encuentra sobre la superficie.

ii. La recta normal a la superficie en el punto $(1,2,1)$ se encuentra calculando el vector normal (interior o exterior) a la superficie en ese punto. Tal normal puede calcularse de varias formas: Calculando el gradiente de la función $F(x,y,z) = x^2 + y + z^2$ en el punto,

$$\vec{\nabla}F = \langle 2x, 1, 2z\rangle,$$

o parametrizando la superficie como

$$\Phi(x,z) = \langle x, 4 - x^2 - z^2, z\rangle,$$

con $(x,z) \in D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$ y tomando

$$\vec{\mathbf{N}}\mid_{(1,2,1)} = \Phi_x \times \Phi_z = \langle -2x, -1, -2z\rangle.$$

En cualquier caso $\vec{\mathbf{N}} = \pm\langle 2,1,2\rangle$ así que la recta normal se escribe como

$$\vec{x} = \langle 1,2,1\rangle + t\langle 2,1,2\rangle,$$

para $t \in \mathbb{R}$.

iii. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1,2,1)$ se obtiene a partir del vector normal y el punto:

$$\langle 2,1,2\rangle \cdot \langle x-1, y-2, z-1\rangle = 2x+y+2z-6=0,$$

i.e. $2x+y+2z=6$.

iv. El área de la superficie parametrizada está dada por

$$A = \iint_S \|\Phi_x \times \Phi_z\|\, dxdz = \iint_S (1+4x^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\, dxdz$$

que, en coordenadas polares se escribe como

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} r\, drd\theta = 2\pi \int_0^2 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} r\, dr = \frac{2\pi}{12}[(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2 = \frac{\pi}{6}[17^{\frac{3}{2}}-1].$$

v. Para calcular la integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie indicada en la fugura y el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle 1, y, 1\rangle$, respecto a la normal exterior (coordenada y positiva) tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\Phi(x,z))\cdot \Phi_z\times\Phi_x\, dz\, dx = \iint_D \langle 1, 4-x^2-z^2, 1\rangle\cdot\langle 2x, 1, 2z\rangle\, dz\, dx = \iint_D (4+2x+2z-x^2-z^2)\, dz\, dx$$

que, en coordenadas polares, es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4+2r\cos\theta+2r\mathrm{sen}\,\theta-r^2)r\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(4+\frac{16}{3}(\mathrm{sen}\,\theta+\cos\theta)\right)d\theta = 8\pi.$$