Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________ Código: ____________

1. i. Diga si el siguientes límite existe, en caso negativo justifique y en caso afirmativo calcúlelo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$

   ii. Entre los siguientes campos vectoriales hay uno no conservativo (es decir que *no* es un gradiente) y uno irrotacional (es decir que *no* es un rotacional), identifíquelos y de una justificación a su respuesta:

   (a) $\vec{\mathbf{F}}_1(x,y,z) = \langle xz-xy, xy-yz, yz-xz\rangle$, (b) $\vec{\mathbf{F}}_2(x,y,z) = \langle y^2\cos z, 2xy\cos z, -xy^2 \operatorname{sen} z\rangle$.

   (6 puntos)

2. i. Considere las funciones

$$f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad g(u,v) = \langle \cos(v^2u), \ln(1+u^2)\rangle.$$

   Calcule $\dfrac{\partial}{\partial u}(f\circ g)(0,1)$.

   ii. Si $yz = \ln(x+z)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   (6 puntos)

3. Considere las superficies de la esfera $x^2+y^2+z^2=6$ y el paraboloide $z = x^2+y^2$ en $\mathbb{R}^3$, y sea P el punto $(1,1,2)$ que está en ambas superficies.

   i. Encuentre la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto P.
   ii. Encuentre la ecuación de la recta normal a cada superficie en el punto P.
   iii. Encuentre la longitud de la curva de intersección de ambas superficies.

   (12 puntos)

4. i. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2-2x+2y^2-4y+1=0$ que se encuentran más cerca y más lejos del eje x.

   ii. Encuentre todos los puntos de silla de la finción $f(x,y) = x^3-3xy+y^3$.

   (6 puntos)

Solución

1. i. El límite *no existe*. En efecto, es fácil darse cuenta de que evaluando este límite por caminos diferentes se obtienen resultados diferentes; por ejemplo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-x)^2}{2x^2} = 0$ al evaluarse sobre la recta $x = y$, pero se obtendría $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = 2$ al evaluarse sobre la recta $x = -y$.

   ii. El campo $\vec{\mathbf{F}}_1$ *no* es un gradiente (i.e. **no** existe un campo escalar f para el cual $\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\nabla} f$) porque su rotacional es diferente de cero: $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}_1 = \langle y+z, x+z, x+y\rangle \neq \vec{0}$. El campo $\vec{\mathbf{F}}_2$ *no* es un rotacional (i.e. **no** existe un campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$ para el cual $\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{G}}$) porque su divergencia no es cero: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}}_2 = 2x\cos y - xy^2 \cos z \neq 0$.

2. i. Sean $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$ y $g(u,v) = \langle \cos(v^2u), \ln(1+u^2)\rangle$. Entonces la derivada de la función compuesta $f \circ g$ en el punto $(0,1)$ está dada por

$$D(f\circ g)(0,1) = Df\mid_{g(0,1)} \cdot Dg\mid_{(0,1)},$$

   en este caso $g(0,1) = (1,0)$ y

$$Dg\mid_{(0,1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix}\mid_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

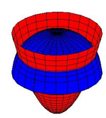
   luego las dos derivadas parciales de $f \circ g$ son cero en $(0,1)$, en particular $\dfrac{\partial}{\partial u}(f\circ g)(0,1) = 0$.

   ii. Sea $F(x,y,z) = yz - \ln(x+z)$, entonces la ecuación dada se satisface en todos los puntos en los que $F(x,y,z) = 0$ y, usando la regla de derivación implícita,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{y(x+z)-1},$$

   siempre que $y(x+z) \neq 1$.

3. Las superficies de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 6$ y el paraboloide $z = x^2+y^2$ en $\mathbb{R}^3$ se intersectan cuando $z^2+z-6 = (z-2)(z+3) = 0$, es decir cuando $z = 2$ como ilustra la figura:



   en el círculo de ecuación $x^2+y^2 = 2$ en $z = 2$, al que pertenece el punto $P = (1,1,2)$.

   i. Para encontrar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto P, calculamos el gradiente de las funciones $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y $F_2(x,y,z) = z - x^2 + y^2$, lo que nos da un vector normal al plano tangente a cada superficie en el punto deseado:

$$\vec{\nabla} F_1\mid_P = \langle 2x, 2y, 2z\rangle\mid_P = \langle 2,2,4\rangle,$$

   y

$$\vec{\nabla} F_2\mid_P = \langle 2x, 2y, -1\rangle\mid_P = \langle 2,2,-1\rangle.$$

   Así, junto con las coordenadas del punto, tenemos la información necesaria para escribir la ecuación de cada plano:

$$2x+2y+4z = 12 \quad \text{y} \quad 2x+2y-z = 2,$$

   respectivamente.

ii. La ecuación de la recta normal a cada plano en el punto $P = (1, 1, 2)$ está determinada por el vector director, calculado en el punto anterior, y las coordenadas del punto. En forma vectorial cada ecuación es:

$$\vec{x}(t) = \langle 1, 1, 2\rangle + t\langle 1, 1, 2\rangle,$$

y

$$\vec{x}(t) = \langle 1, 1, 2\rangle + t\langle 2, 2, -1\rangle,$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

iii. Finalmente, la longitud de la curva de intersección de ambas superficies (un círculo de radio $\sqrt{2}$ sobre el plano $z = 2$) se encuentra parametrizándola convenientemente:

$$\gamma(t) = \langle \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2\rangle,$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Así,

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

4. i. Para encontrar los puntos sobre la elipse $x^2 - 2x + 2y^2 - 4y + 1 = 0$ que se encuentran más cerca y más lejos del eje x debemos buscar los extremos de la función $f(x, y) = y$ sujetos a la restricción $g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 - 4y + 1 = 0$. Para encontrarlos, usando multiplicadores de Lagrange, tendremos que $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, es decir

$$\langle 0, 1\rangle = \lambda\langle 2x - 2, 4y - 4\rangle,$$

lo que nos da dos ecuaciones en x, y y λ: $\lambda(2x - 2) = 0$ y $\lambda(4y - 4) = 1$. La segunda ecuación implica que $\lambda \neq 0$, así que la primera implica que $x = 1$ lo que, usando la restricción, implica que $2y^2 = 4y$ o $y(y - 2) = 0$. Los puntos a considerar son entonces $(1, 0)$ y $(1, 2)$, es claro que el primero minimiza la distancia al eje x y el último la maximiza.

ii. Para encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ calculamos su gradiente y lo igualamos a cero:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \langle 3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

lo que implica que $x^2 = y$ y $y^2 = x$, es decir que $x^4 = x$ o, lo que es lo mismo, $x(x^3 - 1) = 0$. La primera opción es que $x = 0$, caso en el cual la primera ecuación implica que $y = 0$ y nos da como primer punto crítico $(0, 0)$; la segunda opción es que $x = 1$, caso en el cual la primera ecuación implica que $y = 1$ y, en consecuencia, tenemos un punto crítico más, $(1, 1)$.

Los puntos críticos son *puntos de silla* de f cuando el determinante de la matriz de segundas derivadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

es *negativo* (en este caso tal determinante es igual a $36xy - 9$) lo cual es cierto en $(0, 0)$ únicamente, así que este es el único punto de silla de $f(x, y)$.