Departamento de Matemáticas — Universidad de los Andes

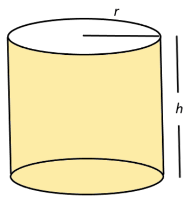
Cálculo Vectorial – Examen Final – Tema A

Diciembre 6 de 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 60 minutos.

Nombre y apellido:

1. Se requiere construir un tanque cilíndrico abierto (sin tapa superior, pero con piso, ver la figura) con una capacidad fija de $125\pi\, m^3$. Encuentre, usando el método de *multiplicadores de Lagrange*, las dimensiones del tanque que minimizan su área.



2. La integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \cos(y^2)\,dzdydx$ calcula la masa de un sólido E en $\mathbb{R}^3$ cuya densidad está dada por la función $\rho = \cos(y^2)$.

i. Haga una gráfica del sólido E cuya masa calcula esta integral, indicando precisamente sus límites en los tres ejes coordenados.

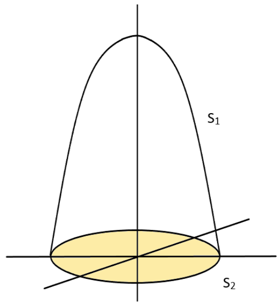
ii. Utilice un cambio adecuado en el orden de integración para calcular la masa del sólido E.

3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, 2x, 3y^2\right)$ y las superficies $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\}$, ambas orientadas respecto a la normal que apunta hacia arriba (ver figura).

i. Enuncie el *Teorema de Stokes*.

ii. Explique por qué $\displaystyle\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

iii. Calcule la integral de la parte ii.



Departamento de Matemáticas — Universidad de los Andes

Cálculo Vectorial – Examen Final – Tema A

Diciembre 6 de 2018

Nombre y apellido:

1. La curva de intersección de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ con el plano y-z en $\mathbb{R}^3$ es:

(a) Una hipérbola (b) Una parábola

(c) Una elipse (d) Un par de rectas.

2. Sea S la superficie del elipsoide en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$. La ecuación del plano tangente al elipsoide S en el punto $(1, 1, 1)$ es:

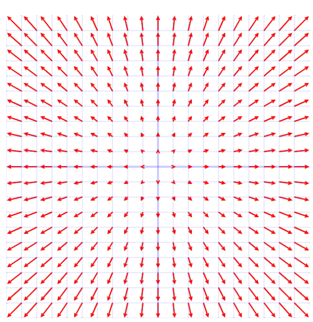
(a) $2x + 3y + 4z = 9$ (b) $4x + 6y + 8z = 9$

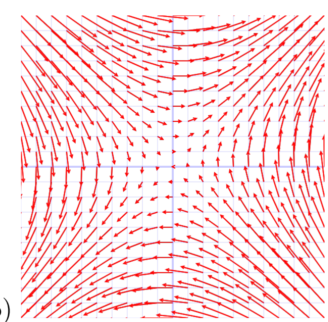
(c) $2(x - 1) + 3(y - 1) + 4(z - 1) = 9$ (d) $4(x - 1) + 6(y - 1) + 8(z - 1) = 0$.

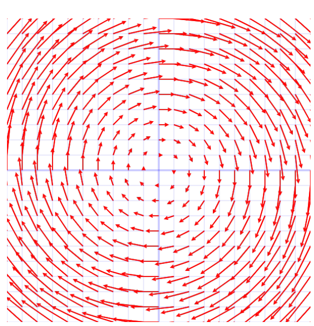
3. La derivada direccional de la función $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ en el punto $(2, 4, 2)$ en la dirección del vector $2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ es:

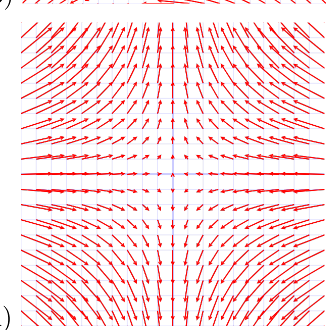
(a) $-\frac{1}{6}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{2}$.

4. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa correctamente al campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = (2y - 4, 2x)$?


(a)


(b)

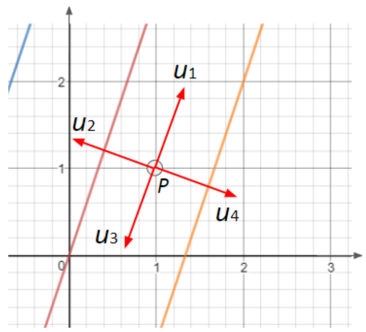

(c)


(d)

5. La función $z = g(x, y)$ está dada implícitamente por $zx + zy^2 = 1$. El vector $\nabla g(1, 1)$ es igual a:

(a) $(-1, -1)$ (b) $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ (c) $(-1, -\frac{1}{2})$ (d) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

6. Considere la función $f(x, y) = y - 3x$. La figura a continuación muestra un punto P y cuatro vectores unitarios $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$.



¿Cuál de los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ o $\mathbf{u}_4$ indica la dirección de mayor incremento instantáneo de la función f en el punto P?

(a) $\mathbf{u}_1$ (b) $\mathbf{u}_2$ (c) $\mathbf{u}_3$ (d) $\mathbf{u}_4$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada como:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y &= \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \\ z &= \cos(\phi) \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi/4$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. ¿Cuál es el área de la superficie S?

(a) 1 (b) $\pi/4$ (c) $\pi/2$ (d) $\pi/8$.

8. Si $f(x, y)$ es una función continua, entonces la integral $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{x}^{3} f(x, y)\, dy\, dx$ es igual a:

(a) $\displaystyle\int_{x}^{3}\int_{-3}^{3} f(x, y)\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} f(x, y)\, dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$ (d) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{y}^{3} f(x, y)\, dx\, dy$.

9. Sea E la región sólida en $\mathbb{R}^3$ descrita por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. El valor de la integral $\displaystyle\iiint_E (1 + x + y)\, dV$ es:

(a) 0 (b) $16\pi/3$ (c) $32\pi/3$ (d) $4\pi/3$.

10. La integral de trayectoria $\displaystyle\int_c x^2\, dx + y^2\, dy - z\, dz$, donde la curva c está parametrizada por las ecuaciones $x(t) = \operatorname{sen}(t) + \cos(t)$, $y(t) = 1 + \cos(t)$ y $z(t) = \operatorname{sen}(t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, es igual a:

(a) 2π (b) 0 (c) -2π (d) 1.

11. Si la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **no** tiene puntos críticos, entonces:

(a) En todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $f(x, y, z)$ **no** es cero.

(b) En todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ la derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x, y, z)$ **no** es cero, para cualquier vector $\vec{v} \neq \vec{0}$.

(c) En todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son constantes.

(d) En todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ existe una dirección $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que la derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x, y, z)$ **no** es cero.

12. Sea S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 1$, orientada con la normal exterior. Observe que esta superficie **no** incluye ni la tapa superior ni la tapa inferior. ¿Para cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ se tiene que $\iint_S \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}$, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S, es igual a cero?

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y, 0)$ (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x, 0, y)$

(c) $\mathbf{F}(x, y) = (0, y, 0)$ (d) $\mathbf{F}(x, y) = (0, 0, z)$.

13. El ruido $R(x, y)$ (en decibeles) que se genera al revolver una cuchara en un tarro depende de la cantidad de agua x en el tarro (en litros) y de la velocidad y al girar la cuchara (en revoluciones por minuto, rpm). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones interpreta correctamente la igualdad $\dfrac{\partial R}{\partial y}(2, 7) = 10$?

(a) Si la velocidad de la cuchara aumenta en 7 rpm y la cantidad de agua es igual a 2 litros, entonces el ruido aumentará aproximadamente en 10 decibeles.

(b) Si la velocidad de la cuchara es igual a 7 rpm y la cantidad de agua aumenta en 2 litros, entonces el ruido será aproximadamente igual a 10 decibeles.

(c) Si la cantidad de agua es de 2 litros y la velocidad de la cuchara es de 7 rpm, entonces aumentar la velocidad en 0.5 rpm hará que el ruido aumente aproximadamente en 5 decibeles.

(d) Si la cantidad de agua es de 2 litros y la velocidad de la cuchara es de 7 rpm, entonces aumentar la velocidad en 0.5 rpm hará que el ruido sea aproximadamente igual a 5 decibeles.

14. Los puntos sobre la curva $x^2 - y^2 = 4$ que están más cerca del punto $(0, 4)$ son:

(a) $(3, -\sqrt{5})$ y $(3, \sqrt{5})$ (b) $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$

(c) $(-2\sqrt{2}, 2)$ y $(2\sqrt{2}, 2)$ (d) $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

15. Considere la región E debajo del paraboloide $z = kx^2 + 3y^2$ y encima del cuadrado en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$ (donde k es una constante positiva). ¿Para qué valor de la constante k tenemos que $\text{Vol}(E) = 10$?

(a) 9 (b) 16 (c) 27 (d) 36.

16. Si σ_1 es el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y σ_2 es la elípse $x^2 + 2y^2 = 1$, ambas curvas en el plano, y consideramos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces

(a) $\displaystyle\int_{\sigma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 2\pi$ (b) $\displaystyle\int_{\sigma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma_2} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$

(c) $\displaystyle\int_{\sigma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} < \int_{\sigma_2} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ (d) $\displaystyle\int_{\sigma_1} f \, ds = \int_{\sigma_2} f \, ds$.

17. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie del cubo definido por $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ y $-1 \leq z \leq 1$, orientado con la normal exterior. Si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^4 + yz^3, \operatorname{sen}(y)z + \cos(2^x), e^{xyz})$, entonces la integral $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es igual a:

(a) $2\pi - \ln(4)$ (b) -1 (c) 0 (d) $4\pi^2 + 16e^3$.

18. Dada la superficie esférica S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada con la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$, considere las integrales

i. $\iint_S \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}\, dS.$

ii. $\iint_S \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{n}\, dS.$

iii. $\iint_S \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}\, dS.$

donde $\hat{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\hat{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ y $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es verdadera?

(a) Las tres integrales son iguales a un mismo valor positivo.
(b) Las tres integrales son iguales a un mismo valor negativo.
(c) Las tres integrales son iguales todas a cero.
(d) Las tres integrales tienen todas valores diferentes entre sí.

19. Sea S el disco elíptico sobre el plano $y + z = 1$, al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientado con la normal unitaria $\mathbf{n}$ con componente z positiva. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, xz, xy)$. Entonces la integral $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ es igual a:

(a) 0 (b) π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 2π.

20. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable y conservativo. Considere las siguientes afirmaciones:

i. $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para cualquier curva cerrada c.

ii. Si c_1 y c_2 son curvas que empiezan en un punto A y terminan en un punto B, entonces

$$\int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

iii. Para cualquier superficie cerrada S se tiene que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$

iv. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$

¿Cuántas de estas cuatro afirmaciones son verdaderas?

(a) Exactamente una (b) Exactamente dos
(c) Exactamente tres (d) Exactamente cuatro.