

Parcial I – Cálculo Vectorial

Agosto 25 de 2009

(7 Puntos) **I.** Responda falso o verdadero justificando (con una prueba o un contraejemplo) su respuesta.

(i) Las rectas

$$\begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2 \\ z = -s + 3 \end{cases} \quad (1)$$

y

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \quad (2)$$

son paralelas.

- (ii) Si $\vec{r}(t)$ es una función vectorial y $|\vec{r}(t)| = C$ es constante, entonces $\vec{r}(t)$ es perpendicular a $\vec{r}'(t)$ en todo punto.
- (iii) La componente tangencial de la aceleración $\vec{a}$ de un cuerpo, que se mueve en el espacio, siempre es proporcional al cuadrado de la curvatura de la trayectoria que describe.

(7 Puntos) **II.** Considere el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ y las curvas dadas por las funciones vectoriales $\vec{r}_1(t) = \langle t, 2 \cos t, 2 \sin t \rangle$ y $\vec{r}_2(s) = \langle 2s - \pi, 2 \sin s, 2 \cos s \rangle$, para $s, t \in [-\pi, \pi]$.

- (i) Demuestre que las dos curvas están sobre el cilindro dado y encuentre un punto P en el cual se intersecten. Haga una gráfica.
- (ii) Encuentre el vector tangente a cada curva en el punto P de intersección.
- (iii) Encuentre la ecuación del plano que pasa por P y contiene los dos vectores de la pregunta anterior. Haga una gráfica.

(7 Puntos) **III.** Considere la curva $\vec{r}_1(t)$ del punto anterior.

- (i) Encuentre la longitud de la curva para t entre $-\pi$ y π .
- (ii) Encuentre la curvatura de la curva en todo punto.
- (iii) Encuentre los vectores tangente unitario, normal y binormal en el punto $\vec{r}_1(0)$.

Solución

I.

- (i) FALSO. Los vectores directores de las rectas dadas son $\langle 1, 0, -1 \rangle$ y $\langle 1, 1, 1 \rangle$, luego no son paralelas.
- (ii) VERDADERO. Si $\vec{r}(t)$ es una función vectorial y $|\vec{r}(t)| = C$ es constante, entonces $\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = 0$, luego

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0,$$

es decir que $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$, así que $\vec{r}(t)$ es perpendicular a $\vec{r}'(t)$ en todo punto.

- (iii) FALSO. La componente tangencial de la aceleración de un cuerpo que se mueve en el espacio, $\vec{a}_T = v'\vec{T}$, es *independiente* de la curvatura de la trayectoria. Es la componente normal de la aceleración la que es proporcional a la curvatura de la trayectoria que describe.

II.

- (i) Las dos curvas están sobre el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ ya que

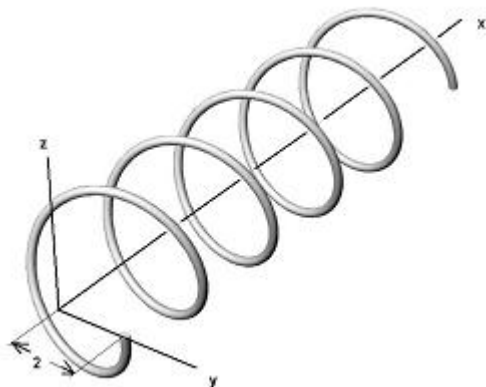
$$(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2 = (2 \sin s)^2 + (2 \cos s)^2 = 4.$$

Un punto P en el cual se intersectan las curvas puede encontrarse a partir de valores para t y s que satisfagan las ecuaciones

$$t = 2s - \pi, \quad \cos t = \sin s, \quad \sin t = \cos s.$$

Poniendo $t = 0$ en la primera ecuación obtenemos, por ejemplo, que para $s = \frac{\pi}{2}$ se verifica

$$\vec{r}_1(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle = \vec{r}_2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$



La gráfica correspondiente es la de dos elipses (aquí solo vemos una) que, con diferente paso, se trazan sobre el cilindro, intersectándose.

- (ii) Derivando las funciones vectoriales, y evaluando en el valor del parámetro correspondiente, encontramos el vector tangente a cada curva en el punto de intersección:

$$\vec{r}'_1(t) = \langle 1, -2\operatorname{sen} t, 2\cos t \rangle \Rightarrow \vec{r}'_1(0) = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

y

$$\vec{r}'_2(s) = \langle 2, 2\cos s, -2\operatorname{sen} s \rangle \Rightarrow \vec{r}'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 2, 0, -2 \rangle.$$

- (iii) Para encontrar la ecuación del plano que pasa por P y contiene los dos vectores tangentes necesitamos un vector normal a tal plano. Calculando el producto cruz de los dos vectores anteriores (contenidos en el plano) tenemos: $\vec{n} = \langle 0, 6, 0 \rangle$, luego

$$0(x - 0) + 6(y - 2) + 0(z - 0) = 0,$$

así que $y = 2$ es la ecuación buscada.

III.

- (i) A partir de la curva $\vec{r}_1(t) = \langle t, 2\cos t, 2\operatorname{sen} t \rangle$ podemos calcular la longitud entre $-\pi$ y π integrando la velocidad:

$$\ell_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} |\vec{r}'_1(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{5} dt = 2\sqrt{5}\pi.$$

- (ii) La curvatura de la curva está dada por:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'_1(t) \times \vec{r}''_1(t)|}{|\vec{r}'_1(t)|^3} = \frac{|\langle 4, 2\operatorname{sen} t, -2\cos t \rangle|}{\sqrt{5}^3} = \frac{2}{5}.$$

- (iii) Finalmente, los vectores tangente unitario, normal y binormal en el punto $\vec{r}_1(0)$ son:

$$\vec{T}(0) = \frac{\vec{r}'_1(0)}{|\vec{r}'_1(0)|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle, \quad \vec{N}(0) = \langle 0, -1, 0 \rangle$$

y

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle.$$