Parcial II – Cálculo Vectorial

Septiembre 22 de 2009

(6 Puntos) **I.** Responda falso o verdadero justificando –matemáticamente– su respuesta.

- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-3x^2y^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} = 0$.
- (ii) La dirección de máximo crecimiento de la función $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 2xz$ en el punto $(1, 1, 1)$ es $\langle 1, 3, -2 \rangle$.
- (iii) Existe una función $f(x, y)$ continua cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$.

(6 Puntos) **II.** (i) Sea $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Muestre que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

(ii) Si $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(iii) Encuentre los puntos críticos de la función $f(x, y) = (x^2 + y)e^{\frac{x}{y}}$ y clasifíquelos (máximos, mínimos, puntos de silla).

(10 Puntos) **III.** Considere la superficie S dada por $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y el plano Π_o cuya ecuación es $2x + 2y = 1$.

(i) Encuentre todos los puntos de la superficie donde el plano tangente a S es paralelo al plano Π_o .

(ii) Trace la curva de intersección entre S y Π_o .

(iii) Encuentre los puntos más cercano y más lejano al origen sobre la curva de intersección.

(iv) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en los puntos anteriores.

Solución

I.

- (i) VERDADERO. Es facil ver que, independientemente del camino tomado ($x = 0, y = 0, x = my, x = y^m, \dots$), $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-3x^2 y^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} = 0$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ fijo, como $x^2 \leq x^2 + y^2$,

$$\left| \frac{-3x^2 y^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3x^2 y^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} \leq 3y^{\frac{1}{2}}$$

y, como $y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, tenemos que $y^{\frac{1}{2}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}$ luego, tomando $\delta = \frac{\epsilon^2}{9}$, si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ entonces $\left| \frac{-3x^2 y^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$, que era lo que debíamos verificar.

- (ii) VERDADERO. La dirección de máximo crecimiento de una función $f(x, y, z)$ en un punto (x_o, y_o, z_o) está dada por $\vec{\nabla} f(x_o, y_o, z_o)$. En este caso $\vec{\nabla} f = \langle 3x^2 - 2z, 3y^2, -2x \rangle$, luego la dirección buscada es $\langle 1, 3, -2 \rangle$.
- (iii) FALSO. Una función $f(x, y)$ continua, cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$, debe tener *segundas derivadas parciales* que satisfacen $f_{xy} = f_{yx}$ (teorema de Clairaut), pero en este caso $f_{xy} = 4 \neq 3 = f_{yx}$.

II.

- (i) Si $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

luego

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y, en forma similar,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sumando los tres términos tenemos entonces

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

- (ii) Si $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
- (iii) Los puntos críticos de la función $f(x, y) = (x^2 + y)e^{\frac{y}{2}}$ están allí donde las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ se anulen. Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{\frac{y}{2}} = 0$ entonces $x = 0$, y como $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{y}{2}}(\frac{x^2}{2} + \frac{y}{2} + 1) = 0$ entonces $y = -2$, es decir que el único punto crítico de la función es $(0, -2)$. Para determinar si el punto indicado es un máximo, un mínimo o un punto de silla calculamos la matriz de derivadas parciales y su determinante en tal punto:

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2e^{\frac{y}{2}} & xe^{\frac{y}{2}} \\ xe^{\frac{y}{2}} & e^{\frac{y}{2}}(\frac{x^2}{4} + \frac{y}{4} + 1) \end{pmatrix} = e^y(-\frac{x^2}{2} + \frac{y}{2} + 2)$$

luego $D_{(0,-2)} = \frac{1}{e^2} > 0$. Finalmente, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2) = \frac{2}{e} > 0$, el punto crítico encontrado es un *mínimo*.

III. Considere la superficie S dada por $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y el plano Π_o cuya ecuación es $2x + 2y = 1$.

- (i) Los puntos de la superficie donde el plano tangente a S es paralelo al plano Π_o son los puntos donde su vector normal $\vec{n}_S$ (dado por el gradiente de $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$) sea paralelo al vector normal $\vec{n}_P$ a Π_o , es decir donde $\vec{n}_S \times \vec{n}_P = \vec{0}$. Tenemos entonces que $\vec{n}_S = \langle 2x, 4y, 2z \rangle$, $\vec{n}_P = \langle 2, 2, 0 \rangle$ y

$$\vec{n}_S \times \vec{n}_P = \langle -4z, 4z, 4x - 8y \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle,$$

es decir que $x = 2y$ y $z = 0$. A partir de la ecuación del elipsoide tenemos entonces que

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 6y^2 = 1,$$

luego $y = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ y entonces $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Otra forma de hacerlo es observar que, dado que el plano Π_o tiene como vector normal $\vec{n}_P = \langle 2, 2, 0 \rangle$ (y este vector tiene 0 en la componente vertical), los puntos en los cuales el plano tangente a la superficie del elipsoide son paralelos a tal plano deben estar sobre la elipse que define el ‘ecuador’ de tal elipsoide (ver la curva punteada en rojo en la figura). Tal elipse está dada por $x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$, es decir que puede ser parametrizada por $\vec{r}(x) = \langle x, \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}, 0 \rangle$. Como el vector tangente a tal curva en el punto que buscamos debe ser perpendicular al vector $\vec{n}_P = \langle 2, 2, 0 \rangle$, basta calcular

$$\vec{r}'(x) = \left\langle 1, \frac{-x}{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}, 0 \right\rangle$$

y pedir

$$\vec{n}_P \cdot \vec{r}'(x) = \langle 2, 2, 0 \rangle \cdot \left\langle 1, \frac{-x}{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}, 0 \right\rangle = 0,$$

es decir que

$$2 - \frac{x}{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} = 0,$$

lo que implica que $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ y entonces $y = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$, igual a lo obtenido según el método anterior.

- (ii) Curva de intersección entre S y Π_o :