Parcial I – Cálculo Vectorial

Febrero 8 de 2010

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero justificando matematicamente su respuesta.

(i) La gráfica de la ecuación $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, en coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$, es un cono.

(ii) Si $\vec{r}(t) = \langle 2, 2\cos t, 2\operatorname{sen} t\rangle$ es una función vectorial que describe la posición de un cuerpo en cada instante de tiempo, entonces tal cuerpo se mueve con *aceleración normal* constante.

(iii) La longitud de la hélice $\vec{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t\rangle$ entre $t = 0$ y $t = 2\pi$ es $\sqrt{6}\pi$.

(6 Puntos) **II**. Sea Π_1 el plano $x-2y+z = 2$ en $\mathbb{R}^3$ y considere el punto $P_1 = (2, 1, 2) \in \Pi_1$.

(i) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es *paralelo* al plano Π_1 y pasa por el origen. Haga una gráfica.

(ii) Encuentre la ecuación de la recta L que contiene los puntos P_1 y $P_2 = (4, 1, -2) \in \Pi_2$. Haga una gráfica.

(iii) Encuentre la distancia entre los planos Π_1 y Π_2.

(6 Puntos) **III**. El cilindro parabólico $y = x^2$ intersecta el elipsoide $2x^2 + y^2 + 6z^2 = 24$ en una curva.

(i) Escriba una función vectorial que parametrice la curva de intersección. Haga una gráfica.

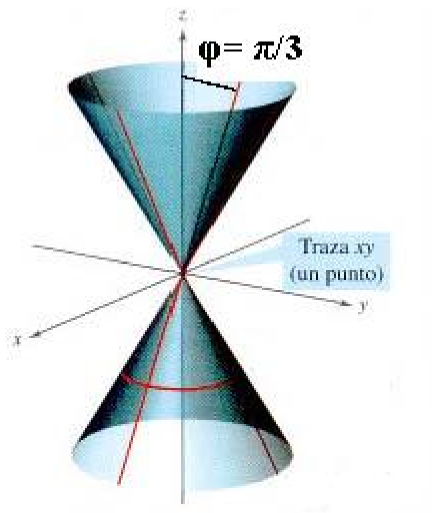
(ii) Encuentre los vectores tangente unitario, normal y binormal a tal curva en el punto $(0, 0, 2)$.

(iii) Encuentre la curvatura de la curva en el mismo punto.

Solución

I.

(i) Verdadero. En $\mathbb{R}^3$ la ecuación $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, en coordenadas esféricas, representa todos los puntos del espacio para los cuales tanto el radio (la distancia al origen) como la ccordenada θ (el ángulo de la proyección del punto con el eje x) son arbitrarios, y el ángulo $\varphi = \frac{\pi}{3}$, i.e. todos los puntos sobre un cono (ver figura).



Analiticamente, podemos encontrar la ecuación cartesiana de tal cono multiplicando a ambos lados por ρ en la ecuación dada y elevando al cuadrado:

$$2\rho\cos\phi = \rho \quad\Rightarrow\quad 4\rho^2\cos^2\phi = \rho^2 \quad\Rightarrow\quad 4z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

así que $x^2 + y^2 = 3z^2$, que es la ecuación de un cono en coordenadas cartesianas.

(ii) Verdadero. La aceleración normal está completamente determinada por la rapidez (la norma del vector velocidad) y la curvatura de la trayectoria. En este caso la trayectoria es un círculo, luego tiene curvatura constante, y la rapidez también es constante: Si $\vec{r}(t) = \langle 2, 2\cos t, 2\operatorname{sen} t\rangle$, entonces la velocidad está dada por $\vec{r}\,'(t) = \langle 0, -2\operatorname{sen} t, 2\cos t\rangle$, la rapidez es $v(t) = |\vec{r}\,'(t)| = 2$ y la aceleración por $\vec{r}\,''(t) = \langle 0, -2\cos t, -2\operatorname{sen} t\rangle$, así que $\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \langle 4, 0, 0\rangle$ y la aceleración normal es

$$a_N = v(t)^2\kappa(t) = \frac{|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)|}{v(t)} = \frac{4}{2} = 2.$$

(iii) Falso. La longitud de la curva está dada por

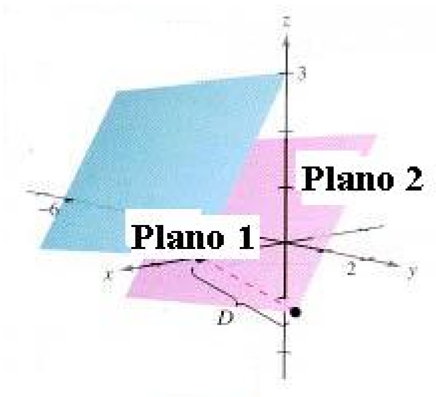
$$\ell = \int_0^{2\pi} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |\langle -2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 1\rangle|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,dt = 2\sqrt{5}\pi.$$

II.

(i) Para encontrar la ecuación del plano Π_2, que es *paralelo* al plano Π_1 y pasa por el origen, hace falta conocer la normal a tal plano y un punto en él. Como los planos son paralelos, la normal es la misma del plano Π_1, es decir $\vec{n} = \langle 1, -2, 1\rangle$, y podemos tomar como punto el origen $(0,0,0)$, luego la ecuación del plano es

$$1(x-0) - 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \quad\Rightarrow\quad x - 2y + z = 0.$$

Los planos son entonces como ilustra la siguiente gráfica:



(ii) El punto $P_1 = (2,1,2) \in \mathbb{R}^3$ hace parte del plano Π_1 ya que satisface la ecuación del plano: $x - 2y + z = 2$. Para encontrar la ecuación $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ de la recta L que contiene los puntos P_1 y $P_2 = (4,1,-2) \in \Pi_2$, debemos conocer dos puntos en la recta para construir un vector $\vec{a}$ del origen a la recta y un vector $\vec{b}$ paralelo a esta. Podemos tomar, por ejemplo, los vectores

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP_1} = \langle 2-0, 1-0, 2-0 \rangle = \vec{a} = \langle 2,1,2 \rangle,$$

y

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle 4-2, 1-1, -2-2 \rangle = \vec{a} = \langle 2,0,-4 \rangle,$$

obteniendo la ecuación vectorial

$$\langle x,y,z \rangle = \langle 2,1,2 \rangle + t\langle 2,0,-4 \rangle$$

o, despejando el parámetro t, las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-2}{2} = \frac{z-2}{-4}, \quad y = 1.$$

(iii) La distancia entre los planos Π_1 y Π_2 puede encontrarse tomando la norma de la proyección ortogonal del vector $\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle 2,0,-4 \rangle$ sobre el vector normal $\vec{n} = \langle 1,-2,1 \rangle$ (o, equivalentemente, usar la ecuación de distancia vista en clase). En este caso

$$D = \left\| \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right\| = \left\| \frac{-2}{6} \langle 1,-2,1 \rangle \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

III.

(i) Para parametrizar la curva de intersección entre el cilindro parabólico $y = x^2$ y el elipsoide $2x^2 + y^2 + 6z^2 = 24$ podemos parametrizar primero el cilindro parabólico:

$$x = t, \quad y = t^2$$

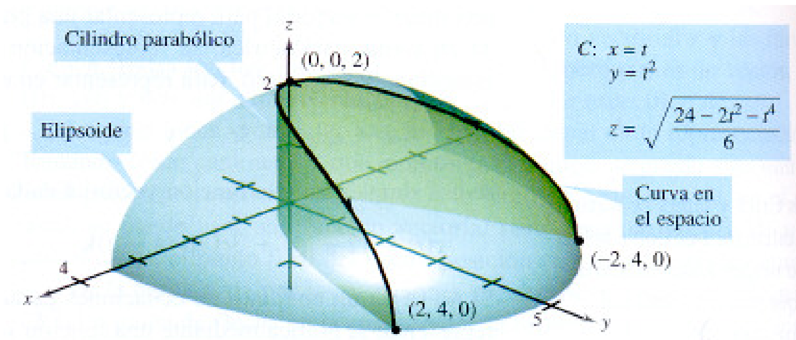
y, luego, apartir de la ecuación del elipsoide, obtener la coordenada faltante:

$$z = \sqrt{\frac{24 - 2x^2 - y^2}{6}} = \sqrt{\frac{24 - 2t^2 - t^4}{6}},$$

es decir que la función vectorial

$$\vec{r}(t) = \langle t, t^2, \sqrt{\frac{24 - 2t^2 - t^4}{6}} \rangle,$$

para $t \in (-\infty, \infty)$, es una parametrización de la curva dada, ilustrada por la siguiente figura:



(ii) El punto $(0,0,2)$ en la curva se encuentra para el valor $t=0$ en nuestra parametrización, así que los vectores tangente unitario, normal y binormal en el punto $\vec{r}(0)$ son:

$$\vec{T}(0) = \frac{\vec{r}\,'(0)}{|\vec{r}\,'(0)|}, \qquad \vec{N}(0) = \frac{\vec{T}\,'(0)}{|\vec{T}\,'(0)|} \quad \text{y} \quad \vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0).$$

Calculando la primera derivada de $\vec{r}(t)$ tenemos que

$$\vec{r}\,'(t) = \langle 1, 2t, \frac{-4t - 4t^3}{\sqrt{144 - 12t^2 - 6t^4}} \rangle$$

y, en $t = 0$ obtenemos un vector unitario

$$\vec{T}(0) = \vec{r}\,'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle,$$

luego en un primer paso no hay que dividir por la norma del vector. Sin embargo, para calcular el vetor normal necesitamos calcular la norma de $\vec{r}\,'(t)$ para cualquier t:

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\frac{144 + 580t^2 - 22t^4 - 8t^6}{144 - 12t^2 - 6t^4}},$$

así que

$$\vec{T}(t) = \sqrt{\frac{144 - 12t^2 - 6t^4}{144 + 580t^2 - 22t^4 - 8t^6}}\, \langle 1, 2t, \frac{-4t - 4t^3}{\sqrt{144 - 12t^2 - 6t^4}} \rangle.$$

Haciendo una derivada mas, y eveluando en $t = 0$, obtenemos

$$\vec{T}'(0) = \langle 0, 2, -\frac{1}{3} \rangle,$$

cuya norma es $|\vec{T}\,'(0)| = \frac{\sqrt{37}}{3}$, luego el vector normal que buscamos es

$$\vec{N}(0) = \frac{\vec{T}\,'(0)}{|\vec{T}\,'(0)|} = \langle 0, \frac{6}{\sqrt{37}}, -\frac{1}{\sqrt{37}} \rangle$$

y el binormal

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) = \langle 0, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{6}{\sqrt{37}} \rangle.$$

(iii) La curvatura de la curva en cualquier punto está dada por: $\kappa(t) = \frac{|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}$. Derivando $\vec{r}\,'(t)$ tenemos que

$$\vec{r}\,''(t) = \langle 0, 2, \frac{(-4-12t^2)(144-12t^2-6t^4)+(2t+2t^3)(-24t-24t^3)}{(144-12t^2-6t^4)^{\frac{3}{2}}}\rangle$$

y, en $t = 0$,

$$\vec{r}\,''(0) = \langle 0, 2, -\frac{1}{3}\rangle,$$

luego

$$\kappa(0) = \frac{|\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)|}{|\vec{r}\,'(0)|^3} = \frac{|\langle 0, \frac{1}{3}, 2\rangle|}{1^3} = \frac{\sqrt{37}}{3}.$$