

Parcial I – Cálculo Vectorial

Agosto 24 de 2010

(6 Puntos) **I.** Responda falso o verdadero (en *tres* de los cuatro enunciados) justificando matemáticamente su respuesta.

- (i) Los puntos $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (0, 1, 1)$ y $P_3 = (0, 1, 2)$ están sobre la misma recta.
- (ii) La superficie formada por todos los puntos P cuya distancia al eje y es dos veces la distancia de P al plano xz es un paraboloides.
- (iii) Si $\vec{r}(t) = \langle 1, t, e^t \rangle$ es una función vectorial que describe la posición de un cuerpo en cada instante de tiempo, entonces tal cuerpo se mueve con aceleración constante.
- (iv) La gráfica de la ecuación $\rho = 2 \sin \varphi$, en coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$, es una esfera.

(6 Puntos) **II.** Considere la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, -\frac{1}{3}t^3 \rangle$, para $t \in \mathbb{R}$. Responda las siguientes preguntas ilustrando sus respuestas en una gráfica de la curva.

- (i) Encuentre la longitud de la curva entre $t = -3$ y $t = 3$.
- (ii) Encuentre los vectores tangente unitario $\vec{T}$, normal $\vec{N}$ y binormal $\vec{B}$, a tal curva, en el punto $(2, 1, -\frac{1}{3})$.
- (iii) Encuentre la ecuación del plano que contiene los vectores $\vec{T}$ y $\vec{N}$, tangente unitario y normal, en $(2, 1, -\frac{1}{3})$.
- (iv) Encuentre la ecuación de la recta L que contiene al vector binormal $\vec{B}$ en $(2, 1, -\frac{1}{3})$.

(3 Puntos) **III.** El cilindro parabólico $y = x^2$ intersecta al plano $x + y - z = 1$ en una curva.

- (i) Escriba una función vectorial que parametrice la curva de intersección.
- (ii) Encuentre la curvatura de la curva. Haga una gráfica.

Solución

I.

- (i) VERDADERO. Es facil ver que dos vectores definidos por pares de los puntos dados son paralelos. Por ejemplo, si consideramos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = \langle 0, 0, 2 \rangle$ tenemos que $2\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_3}$, luego los tres puntos están sobre la misma recta.

- (ii) FALSO. Si $P = (x, y, z)$ y $d(P, \text{eje } y) = 2d(P, \Pi_{xy})$, entonces $d(P, \text{eje } y)^2 = 4d(P, \Pi_{xy})^2$ y, calculando las distancias tenemos que

$$x^2 + z^2 = 4y^2,$$

que es la ecuación de un *cono*, no de un paraboloide.

- (iii) FALSO. La aceleración del cuerpo en movimiento sobre la curva $\vec{r}(t) = \langle 1, t, e^t \rangle$ está dada por

$$\vec{r}''(t) = \langle 0, 0, e^t \rangle,$$

que obviamente no es constante.

- (iv) FALSO. Analíticamente, podemos encontrar la ecuación cartesiana de tal superficie multiplicando a ambos lados por ρ en la ecuación dada:

$$2\rho \sin\phi = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

y, sabiendo que $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\phi$, obtenemos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

lo cual no es la ecuación de una esfera, sino de un toro.

II.

- (i) La longitud de la curva está dada por

$$\ell = \int_{-3}^3 |\vec{r}'(t)| dt = \int_{-3}^3 |\langle 2, 2t, -t^2 \rangle| dt = \int_{-3}^3 \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} dt = \int_{-3}^3 (2+t^2) dt = [2t + \frac{t^3}{3}]_{-3}^3 = 30.$$

- (ii) El punto $(2, 1, -\frac{1}{3})$ en la curva se encuentra para el valor $t = 1$ en la parametrización $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, -\frac{1}{3}t^3 \rangle$, así que los vectores tangente unitario, normal y binormal en tal punto son:

$$\vec{T}(1) = \frac{\vec{r}'(1)}{|\vec{r}'(1)|}, \quad \vec{N}(1) = \frac{\vec{T}'(1)}{|\vec{T}'(1)|} \quad \text{y} \quad \vec{B}(1) = \vec{T}(1) \times \vec{N}(1).$$

El vector tangente unitario en cualquier punto es

$$\vec{T}(t) = \frac{\langle 2, 2t, -t^2 \rangle}{(2+t^2)}$$

luego, en $t = 1$, obtenemos

$$\vec{T}(1) = \frac{\vec{r}'(1)}{|\vec{r}'(1)|} = \langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \rangle.$$

Para calcular el vector normal derivamos el vector $\vec{T}(t)$ y obtenemos

$$\vec{T}'(t) = \frac{\langle -4t, -4t^2 + 2(2+t^2), 2t^3 - 2t(2+t^2) \rangle}{(2+t^2)^2}$$

luego, en $t = 1$, $\vec{T}'(1) = \langle -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9} \rangle$, luego

$$\vec{N}(1) = \frac{\vec{T}'(1)}{|\vec{T}'(1)|} = \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \rangle.$$

Finalmente, el vector binormal resulta ser

$$\vec{B}(1) = \vec{T}(1) \times \vec{N}(1) = \langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle.$$

- (iii) El plano que contiene los vectores tangente y normal unitario en el punto $(2, 1, -\frac{1}{3})$ tiene como vector director al binormal unitario, así que la ecuación de tal plano tangente es

$$-\frac{1}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{2}{3}(z-\frac{1}{3}) = 0,$$

i.e.

$$-x + 2y + 2z = \frac{2}{3}.$$

- (iv) La recta que contiene el vector binormal unitario en el punto $(2, 1, -\frac{1}{3})$ tiene como ecuación vectorial

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 2, 1, -\frac{1}{3} \rangle + t \langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$$

que, en forma simétrica, es

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{\frac{2}{3}} = \frac{z-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}.$$

III.

- (i) Para parametrizar la curva de intersección entre el cilindro parabólico $y = x^2$ y el plano $x + y - z = 1$ podemos parametrizar primero el cilindro parabólico:

$$x = t, \quad y = t^2$$

y, luego, apartir de la ecuación del plano, obtener la coordenada faltante:

$$z = x + y - 1 = t^2 + t - 1,$$

es decir que la función vectorial

$$\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^2 + t - 1 \rangle,$$

para $t \in (-\infty, \infty)$, es una parametrización de la curva dada, ilustrada por la siguiente figura:

- (ii) La curvatura de la curva en cualquier punto está dada por:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

Derivando obtenemos

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, 2t, 2t + 1 \rangle,$$

luego

$$\vec{r}''(t) = \langle 0, 2, 2 \rangle$$

así que

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \langle -2, -2, 2 \rangle$$

y

$$\kappa(t) = \frac{|\langle -2, -2, 2 \rangle|}{|\langle 1, 2t, 2t + 1 \rangle|^3} = \frac{\sqrt{12}}{(8t^2 + 4t + 2)^{\frac{3}{2}}}.$$